

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Čupr

Součty některých řad. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 4, 407--408

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123106>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1907

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Hlavní známka rozboru měřického záleží v tom, že si představujeme předloženou úlohu zpravidla sestrojenou přiměřeně všem požadavkům, tedy *hotovou*. V sestrojeném náčrtu úlohy hledíme pak pomocí různě vedených přímek (rovnoběžek, kolmic, medián a j.) sestrojiti obrazec známým způsobem a od toho postupujice zpět dle známých měřických vět, docházíme pak k zadanému sestrojení záhadného obrazce. Tak na př. v naší úloze myslíme si lichoběžník $ABCD$ *) sestrojený, vyhovující daným požadavkům, t. j. $DC \parallel AB$ a úhlopříčkami $AC \parallel BD$, a vedme koncem úhlopříčky AC rovnoběžku $CE \parallel DB$ k úhlopříčné druhé, až protne prodlouženou základnu AB v bodě E . I jest $BE = DC$, pročez $\triangle AEC$ jest stranami AE , AC a EC určen. Z daného tohoto trojúhelníka sestrojíme pak žádaný lichoběžník $ABCD$ vedením $CD \parallel AE$, spojením D s A a C s B , neboť délka AB jest dána. Tedy zbývá úloha známá: „Sestrojiti trojúhelník ze součtu obou rovnoběžných stran lichoběžníka, které jsou dány, a z daných jeho úhlopříček, taktéž daných.“ Úloha tato uvedena je tudíž na úlohu jednodušší a známou a proto řešena. Řešením algebraickým téže úlohy nabýváme úloh nových, namnoze složitějších a nepřístupnějších, ale někdy nezbývá jiné cesty než této široké silnice, z níž pak odbočujeme na pěšinku geometrickou, která tvoří takořka *stezku* kratší a pohodlnější než jest široká cesta algebraická.

Součty některých řad.

Napsal K. Čupr.

1. Máme-li sečísti řadu

$$S_1 = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos m\alpha, \quad (1)$$

násobíme každý člen $2 \sin \alpha$ a použijme vzorce

$$2 \cos k\alpha \sin \alpha = \sin (k + 1)\alpha - \sin (k - 1)\alpha.$$

*) Laskavý čtenáři, načrtniž si obrazec sám a označ $ABCD$.

I bude

$$\begin{aligned}
 2S_1 \sin \alpha &= 2 \cos \alpha \sin \alpha + 2 \cos 2\alpha \sin \alpha + 2 \cos 3\alpha \sin \alpha + \dots \\
 &\quad + 2 \cos m\alpha \sin \alpha \\
 &= \sin 2\alpha - \sin 0\alpha \\
 &\quad + \sin 3\alpha - \sin \alpha \\
 &\quad + \sin 4\alpha - \sin 2\alpha + \\
 &\quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &\quad + \sin m\alpha - \sin (m-2)\alpha \\
 &\quad + \sin (m+1)\alpha - \sin (m-1)\alpha \\
 &= \sin m\alpha + \sin (m+1)\alpha - \sin \alpha \\
 &= \sin m\alpha \cos \alpha + \cos m\alpha \sin \alpha + \sin m\alpha - \sin \alpha \\
 &= \sin m\alpha (1 + \cos \alpha) - \sin \alpha (1 - \cos m\alpha) \\
 &= 2 \sin m\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \alpha \sin^2 \frac{m\alpha}{2} \\
 &= 4 \sin \frac{m\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{m\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{m\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\
 &= 4 \sin \frac{m\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{m+1}{2} \alpha;
 \end{aligned}$$

posléze jest

$$S_1 = \frac{\sin \frac{m\alpha}{2} \cos \frac{m+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (2)$$

Máme-li sečísti řadu

$$S_2 = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin m\alpha, \quad (3)$$

násobme opět $\cos \alpha$ a pomocí vzorce

$$2 \sin k\alpha \cos \alpha = \sin (k+1)\alpha + \sin (k-1)\alpha,$$

obdržíme po obdobné redukci

$$S_2 = \frac{\sin \frac{m\alpha}{2} \sin \frac{m+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (4)$$