Karel Čupr

Součty některých řad. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 4, 407--408

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123106`

Hlavní známka rozboru měřického záleží v tom, že si představujeme předloženou úlohu zpravidla sestrojenou přiměřeně všem požadavkům, tedy *hotovou*. V sestrojeném náčrtu úlohy hledíme pak pomocí různě vedených přímek (rovnoběžek, kolmic, medián a j.) sestrojiti obrazec známým způsobem a od toho postupujíce zpět dle známých měřických vět, docházíme pak k žádanému sestrojení záhadného obrazce. Tak na př. v naší úloze mysleme si lichoběžník $ABCD$ *) sestrojený, vyhovující daným požadavkům, t. j. $DC \parallel AB$ a úhlopříčkami $AC \parallel BD$, a veďme koncem úhlopříčky AC rovnoběžku $CE \parallel DB$ k úhlopříčně druhé, až protne prodlouženou základnu AB v bodě E. I jest $BE = DC$, pročež $\triangle AEC$ jest stranami AE, AC a EC určen. Z daného tohoto trojúhelníka sestrojíme pak žádaný lichoběžník $ABCD$ vedením $CD \parallel AE$, spojením D s A a C s B, neboť délka AB jest dána. Tedy zbývá úloha známá: „Sestrojiti trojúhelník ze součtu obou rovnoběžných stran lichoběžníka, které jsou dány, a z daných jeho úhlopříček, taktéž daných.“ Úloha tato uvedena je tudíž na úlohu jednodušší a známou a proto řešena. Řešením algebraickým téže úlohy nabýváme úloh nových, namnoze složitějších a nepřístupnějších, ale někdy nezbývá jiné cesty než této široké silnice, z níž pak odbočujeme na pěšinku geometrickou, která tvoří takořka *stezku* kratší a pohodlnější než jest široká cesta algebraická.

Součty některých řad.

Napsal **K. Čupr.**

1. Máme-li sečísti řadu

$$S_1 = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos m\alpha, \qquad (1)$$

násobme každý člen $2 \sin\alpha$ a použijme vzorce

$$2 \cos k\alpha \sin\alpha = \sin (k + 1)\alpha - \sin (k - 1)\alpha.$$

---

*) Laskavý čtenáři, načrtniž si obrazec sám a označ $ABCD$.

I bude

$$
\begin{aligned}
2S_1 \sin\alpha = {} & 2\cos\alpha\sin\alpha + 2\cos 2\alpha\sin\alpha + 2\cos 3\alpha\sin\alpha + \ldots \\
& + 2\cos m\alpha\sin\alpha \\
& = \sin 2\alpha - \sin 0\alpha \\
& + \sin 3\alpha - \sin\alpha \\
& + \sin 4\alpha - \sin 2\alpha + \\
& \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\
& + \sin m\alpha - \sin(m-2)\alpha \\
& + \sin(m+1)\alpha - \sin(m-1)\alpha \\
= {} & \sin m\alpha + \sin(m+1)\alpha - \sin\alpha \\
= {} & \sin m\alpha\cos\alpha + \cos m\alpha\sin\alpha + \sin m\alpha - \sin\alpha \\
= {} & \sin m\alpha(1+\cos\alpha) - \sin\alpha(1-\cos m\alpha) \\
= {} & 2\sin m\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\alpha\sin^2\frac{m\alpha}{2} \\
= {} & 4\sin\frac{m\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{m\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right) \\
= {} & 4\sin\frac{m\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{m+1}{2}\alpha;
\end{aligned}
$$

posléze jest

$$
S_1 = \frac{\sin\frac{m\alpha}{2}\cos\frac{m+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{2}
$$

Máme-li sečísti řadu

$$
S_2 = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin m\alpha, \tag{3}
$$

násobme opět $2\cos\alpha$ a pomocí vzorce

$$
2\sin k\alpha\cos\alpha = \sin(k+1)\alpha + \sin(k-1)\alpha,
$$

obdržíme po obdobné redukci

$$
S_2 = \frac{\sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{m+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{4}
$$