M. Smok

Sčítání a odčítání bodů v rovině

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 4, 393--403

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123105

Sčítání a odčítání bodů v rovině.

Napsal Dr. **M. Smok.**

Trojúhelník v rovině je dán třemi svými vrcholy A, B, C. Je-li na př. úlohou vésti těžnici jeho vrcholem A, prochází žádaná přímka bodem A a bodem A_1 ležícím uprostřed bodů B, C. Pro tuto úlohu se tedy dají *dva* body B, C nahraditi *jediným* bodem A_1. Nebo měla by se vésti přímka daným bodem D a těžištěm T trojúhelníka ABC. Patrno, že pro žádanou přímku se dají *tři* body A, B, C nahraditi *jediným* bodem T a pod. Jest to zcela něco obdobného, jako ve fysice se dají často dvě nebo více hmot nahraditi co do účinku jedinou hmotou, dvě nebo více sil jedinou silou.

Krátce jako ve fysice skládáme na př. dané síly v jedinou, tak lze i v mathematice skládati dané body v jediný. Omezíme se pouze na jich sčítání a odčítání.

I.

1. Mějme bod v rovině třebas A a přičtěme k němu týž bod A, t. j. hledejme význam součtu $A + A$. Dostaneme přirozeně zase týž bod A; abychom však naznačili, že vznikl tento bod sečtením dvou bodů, označíme ho $2A$, tak že jest:

$$A + A = 2A.$$

Podobně bude

$$A + 2A = 3A,$$

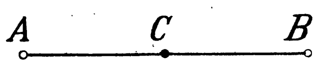
$$A + 2A + 3A = (1 + 2 + 3)\,A = 6A \text{ atd.}$$

Číslo: 2, 3, 6 atd. budeme zváti ***koefficientem*** k bodu A.

Při každém bodu budeme tedy rozeznávati jednak jeho pouhé označení: A, B, C, . . ., jednak jeho koefficient k. V uvedených rovnicích bychom měli místo A vlastně psáti $1A$, t. j. připsati koefficient jednotkový; ten však nebudeme připisovati, podobně jako v obyčejné mathematice nepíšeme 1 za součinitele.

2. Mějme dále dány dva různé body A, B — oba o koefficientech jednotkových — a ptejme se po významu jich součtu $A + B$.

Za součet jich považujeme opět bod třebas C ležící na přímce AB uprostřed bodů A, B — (obr. 1.). Bod C dělí tedy



Obr. 1.

délku AB v poměru 1 : 1, anebo jeho dělící poměr $(ABC) = 1$ *). Bod ten zastupuje vlastně dva body koefficientů jednotkových, proto jeho koefficient $k = 1 + 1 = 2$. Takže píšeme

$$A + B = (1 + 1)\, C = 2C.$$

Pro bližší porozumění vzpomeňme si jisté analogie fysikální. Nechť v bodě A působí jednotková síla a s ní rovnoběžně v bodě B síla rovněž jednotková. Obě tyto síly dají se nahraditi jedinou silou, jejíž velikost $= 1 + 1 = 2$, a jejíž působiště jest uprostřed bodů A, B. Dle téhož principu vysvětlujeme si tedy také bodový součet $A + B$.

3. Mějme však na př. součet:

$$2A + 3B,$$

tedy součet dvou bodů, jejichž koefficienty jsou 2 resp. 3.

Z předcházejícího lze souditi, že dostaneme opět jistý bod třebas C, jeho koefficient bude však $k = 2 + 3 = 5$. Polohu jeho volíme na přímce AB tak, aby rozděloval vzdálenost AB v poměru 3 : 2, t. j. aby jeho dělící poměr dle našeho označování byl $(ABC) = \frac{3}{2}$ — (obr. 2.). Píšeme pak

$$2A + 3B = (2 + 3)\, C = 5C.$$

*) Poněvadž C je uprostřed bodů A a B, měli bychom vlastně psáti $(ABC) = -1$; odchylujeme se tedy od obvyklého značení tím, že volíme znaménko opačné.

Tak jest to v souhlase s případem předcházejícím jakož i s uvedenou analogií. Neboť dvě rovnoběžné síly jistých velikostí působící v bodech A, B dávají výslednici rovnou co do velikosti součtu obou složek; její působiště dělí pak vzdálenost AB v převráceném poměru sil.

4. Podobně obecně bychom psali:

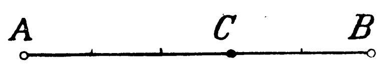
$$\mu A + \nu B = (\mu + \nu)\, C, \tag{1}$$

kdež C *značí bod přímky* AB *položený tak, že dle našeho označování jeho dělící poměr* $(ABC) = \frac{\nu}{\mu}$. *Koefficient jeho* $k = \mu + \nu$.

Vidíme, že bodovou naší rovnicí je bod C dán nejen analyticky, ale dle významu rovnice té i geometricky. Tedy na př. rovnicemi

$$2A + B = 3C$$
$$A + 2B = 3D$$

jsou analyticky dány body C, D rozdělující úsečku AB na tři díly; a sice bod C dělí ji v poměru $1 : 2$, bod D v poměru $2 : 1$. Tím je dána jich geometrická konstrukce.



Obr. 2.

Čísla μ, ν byla dosud čísla kladná celá.

5. Mají-li platiti pravidla sčítání, soudíme z rovnice $A + B = 2C$, že

$$2C - A = B = (2 - 1)\, B.$$

Při tom $(CAB) = -\frac{1}{2}$. To jest, odečtu-li od bodu C o koefficientu $= 2$ bod A koefficientu jednotkového, dostanu bod B ležící na přímce CA tak, že $(CAB) = -\frac{1}{2}$. Jeho koefficient $k = 2 - 1 = 1$.

6. Podobně plyne z rovnice $2A + 3B = 5C$:

$$5C - 3B = 2A,$$
$$5C - 2A = 3B.$$

Slovy: Rozdíl $5C - 3B$ dává bod A o koefficientu $k = 5 - 3 = 2$ ležící na přímce CB tak, že $(CBA) = -\frac{3}{5}$; při druhém rozdílu dostáváme bod B o koefficientu $k = 3$ a položený na přímce CA dle poměru $(CAB) = -\frac{2}{5}$.

Tím jednak máme vysvětlen význam odčítání bodů, jednak shledáváme, že základní naše obecná rovnice (1) platí v plném svém významu i tehdy, je-li koefficient μ nebo ν záporný.

7. Úvahou i geometricky dále plyne: Rovnice

$$A + B = 2C,$$
$$nA + nB = 2nC,$$
$$\frac{1}{n}A + \frac{1}{n}B = \frac{2}{n}C$$

dávají týž bod.

Podobně na př.:

$$\mu A + \nu B = (\mu + \nu)\, C,$$
$$\nu B + \mu A = (\nu + \mu)\, C$$

dávají rovněž týž bod, a poněvadž platí nejen

$$\mu A + \nu B = (\mu + \nu)\, C,$$

nýbrž i

$$(\mu + \nu)\, C - \mu A = \nu B, \quad (\mu + \nu)\, C - \nu B = \mu A$$

atd., vidíme jednak, že pro naše bodové rovnice platí táž pravidla jako pro rovnice obyčejné, jednak, že čísla μ, ν mohou býti také nejen záporná, nýbrž i lomená atd. Krátce *význam rovnice* $(\mu A + \nu B) = (\mu + \nu)\, C$ *zůstává vždy analyticky i geometricky v platnosti, ať jsou koefficienty* μ, ν *algebraická čísla jakákoliv* *).

8. Konečně dovedeme na základě dosavadního stanoviti si nezbytnou a nutnou *podmínku, kdy tři body* A, B, C *o koefficientech* μ, ν, λ *leží na jedné přímce.*

Předně musí:

$$\mu A + \nu B = \lambda C \tag{2}$$

a za druhé:

$$\mu + \nu = \lambda. \tag{3}$$

Podmínek těchto budeme v následujícím často užívati.

---

*) Vynecháváme pouze případ, že by některý z koefficientů měl hodnotu $= 0$. Hodnota ta má však též význam; příslušný bod leží v nekonečnu.

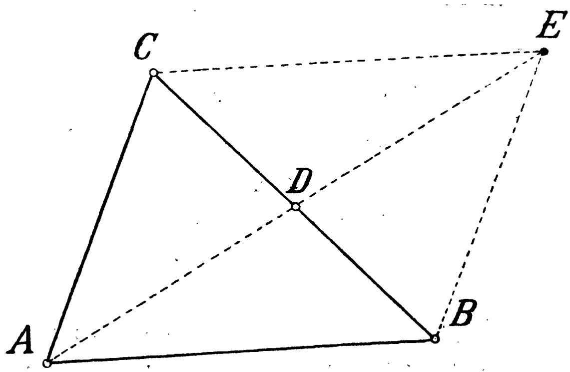
II.

1. Jest stanoviti význam rovnice o třech bodech na př.: $B + C - A$, kdež A, B, C jsou tři libovolné body roviny o koefficientech jednotkových. Poněvadž $B + C = 2D$, kde bod D leží uprostřed úsečky BC — viz obr. 3. — jest $B + C - A = 2D - A = E$.

Daná rovnice stanoví tedy bod E, jenž, jak z konstrukce plyne, jest čtvrtým vrcholem rovnoběžníka $ABCE$. Mohli jsme místo $B + C - A = E$ psáti též

$$B + C = A + E,$$

t. j. sestrojiti střed délky BC, a ten je též středem pro AE, čímž bod E je geometricky stanoven.



Obr. 3.

2. Podobně bychom řešili i obecný případ

$$\lambda A + \mu B + \nu C$$

píšíce

$$\lambda A + \mu B + \nu C = (\lambda + \mu + \nu) D, \tag{4}$$

ať jsou λ, μ, ν čísla jakákoliv.

Geometricky stanovíme bod D tak, že buď sestrojíme nejprve bod E_1 dle rovnice

$$\lambda A + \mu B = (\lambda + \mu) E_1,$$

nebo bod E_2 dle

$$\lambda A + \nu C = (\lambda + \nu) E_2,$$

nebo bod E_3 dle
$$\mu B + \nu C = (\mu + \nu)\, E_3.$$

Každý z bodů E_1, E_2, E_3 spojen jsa s příslušným vynechaným z bodů A, B, C dává pak hledaný bod D.

Zároveň plyne z rovnic

$$(\lambda + \mu)\, E_1 + \nu C = (\lambda + \mu)\, E_2 + \mu B\ \lambda A = + (\mu + \nu)\, E_3$$
$$= (\lambda + \mu + \nu)\, D$$

na základě podmínky (2) a (3), že přímky E_1C, E_2B, E_3A protínají se v jediném bodě a sice D.

3. Mějme na př. sestrojiti: $-\frac{3}{2}B + \frac{1}{2}C - \frac{1}{4}A$.

Rovnici
$$-\frac{3}{2}B + \frac{1}{2}C - \frac{1}{4}A = -\frac{5}{4}D$$
lze nahraditi
$$6B - 2C + A = 5D.$$
Sestrojujeme-li dle podaného návodu, jest — (viz obr. 4.) —:
$$\begin{aligned} 6B - 2C &= 4E_1 \\ 2C - A &= E_2 \\ A + 6B &= 7E_3. \end{aligned}$$
Poněvadž
$$A + 4E_1 = 6B - E_2 = -2C + 7E_3 = 5D,$$
leží bod D na přímkách AE_1, BE_2, CE_3, jest to tedy průsečík tří příček daného $\triangle ABC$ jdoucích jeho vrcholy.

4. Buď dán $\triangle ABC$ s vrcholy o koefficientech jednotkových, a hledejme bod T dle rovnice
$$A + B + C = 3T. \tag{5}$$
Konstrukce rovnicí tou daná je známá konstrukce těžiště trojúhelníka ABC.

Poněvadž
$$(A + B) + C = (A + C) + B = A + (B + C) = 3T,$$
plynou rázem známé věty: Konstrukci lze provésti trojím způsobem; těžnice trojúhelníka se protínají v jediném bodě.

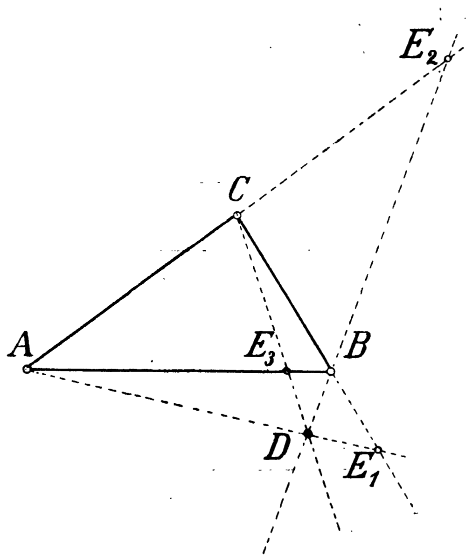
Poněvadž bod T je *těžištěm* trojúhelníka, nazývá se i bod D daný obecnou rovnicí:

$$\lambda A + \mu B + \nu C = (\lambda + \mu + \nu) D$$

těžištěm bodů A, B, C *s koefficienty resp.* λ, μ, ν.

5. Volme si tedy na př. za koefficienty vrcholů $\triangle ABC$ čísla a, b, c značící poměrná čísla délek protějších stran a hledejme jich těžiště. Pišme:

$$aA + bB + cC = (a + b + c) D. \qquad (6)$$



Obr. 4.

Hledané těžiště lze sestrojiti trojím způsobem a vzhledem k tomu, co jsme obecně řekli o rovnici (4), plyne známá věta: Rozdělíme-li každou stranu trojúhelníka v poměru přilehlých stran, procházejí spojnice vzniklých tak dělících bodů s protějším vrcholem jediným bodem. Každá ze spojnic je bodem tím dělena v poměru příslušné strany k součtu dvou ostatních. Stanovený bod je střed kruhu vepsaného $\triangle ABC$.

6. Rovněž zajímavým je hledati těžiště V, jsou-li koefficienty vrcholů trojúhelníka hodnoty resp. $\frac{a}{\cos\alpha}$, $\frac{b}{\cos\beta}$, $\frac{c}{\cos\gamma}$, kdež a, b, c jsou délky stran, α, β, γ úhly trojúhelníka.

Rovnice (4) má pak tvar

$$\frac{a}{\cos\alpha}A + \frac{b}{\cos\beta}B + \frac{c}{\cos\gamma}C \doteq \left(\frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\cos\beta} + \frac{c}{\cos\gamma}\right)V. \quad (7)$$

Sestrojíme-li si nejprve třebas bod $\frac{a}{\cos\alpha}A + \frac{b}{\cos\beta}B$, jest bod ten patou výšky příslušné vrcholu C, neboť dělí stranu AB v poměru $b\cos\alpha : a\cos\beta$. Spojnice jeho s vrcholem C je tedy uvedenou právě výškou. Z trojí možné konstrukce bodu D plyne známá rovněž věta: Výšky trojúhelníka se protínají v jediném bodě. Bod ten dělí na př. výšku strany c v poměru

$$\frac{\frac{c}{\cos\gamma}}{\frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\cos\beta}}$$

aneb, poněvadž $a\cos\beta + b\cos\alpha = c$, v poměru

$$\frac{\cos\alpha \,.\, \cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Místo koefficientů: $\frac{a}{\cos\alpha}$, $\frac{b}{\cos\beta}$, $\frac{c}{\cos\gamma}$ mohli jsme vzíti úměrné jim hodnoty $tg\,\alpha$, $tg\,\beta$, $tg\,\gamma$; pak bychom měli rovnici

$$\begin{aligned} tg\,\alpha\, A + tg\,\beta\, B + tg\,\gamma\, C &= (tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma)\, V \\ &= tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta \,.\, tg\,\gamma\, V. \end{aligned} \quad (7')$$

7. Jiným příkladem byl by na př. trojúhelník o koefficientech: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$.

8. Pro koefficienty: $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$ dostaneme střed S kruhu $\triangle ABC$ opsaného.

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha\, A + \sin 2\beta\, B + \sin 2\gamma\, C &= (\sin 2\alpha + \sin 2\beta \\ &+ \sin 2\gamma)\, S = 4 \sin\alpha \,.\, \sin\beta \,.\, \sin\gamma\, S. \end{aligned} \quad (8)$$

9. Rovnici (7′) bodu V dělme součinem $tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta\,.\,tg\,\gamma$. Dostaneme

$$\frac{1}{tg\,\beta\,.\,tg\,\gamma}A+\frac{1}{tg\,\alpha\,.\,tg\,\gamma}B+\frac{1}{tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}C=V.$$

Podobně z rovnice (8) bodu S dělením součinem $4\sin\alpha\,.\,\sin\beta\,.\,\sin\gamma$ obdržíme po zjednodušení:

$$\frac{\cos\alpha}{2\sin\beta\sin\gamma}A+\frac{\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\gamma}B+\frac{\cos\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta}C=S.$$

Utvoříme-li z těchto dvou rovnic součet $V+2S$, dostaneme obvyklé těžiště trojúhelníka; neboť po úpravě a trigonometrických redukcích plyne:

$$V+2S=A+B+C=3T.$$

V trojúhelníku leží průsek výšek, průsek těžnic a střed kruhu opsaného na jedné přímce (*přímka Eulerova*). Úsečka VS je bodem T dělena v poměru 2 : 1.

Středy stran uvažovaného trojúhelníka t. j. body: $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C$, $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C$ položme kruh. Jeho střed S_1 je dán dle (8) rovnicí:

$$\frac{\cos\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta}\cdot\frac{A+B}{2}+\frac{\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\gamma}\cdot\frac{A+C}{2}$$
$$+\frac{\cos\alpha}{2\sin\beta\sin\gamma}\cdot\frac{B+C}{2}=S_1,$$

t. j.

$$\frac{\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}A+\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\gamma}{8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}A$$
$$+\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}C=S_1.$$

Srovnáme-li vhodně upravený součet $V+S$ s rovnicí bodu S_1, shledáme, že

$$V+S=2S_1.$$

Střed kruhu S_1 leží rovněž na přímce Eulerově — a sice uprostřed bodů V a S. Na základě toho, jakož i početně plynou další zřejmé rovnice

$$2S_1+S=3T,$$
$$V+3T=4S_1.$$

III.

Podobně jako pro tři body dá se najíti i *těžiště* čtyř daných bodů A, B, C, D, t. j. bod E dle

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \sigma D = (\lambda + \mu + \nu + \sigma) E, \qquad (9)$$

ať jsou koefficienty daných bodů jakékoliv.

1. Buďtež na př. koefficienty vesměs jednotkové; pak příslušné těžiště je dáno rovnicí:

$$A + B + C + D = 4E.$$

Poněvadž

$$A + B + C + D = (A + B) + (C + D) = (A + D) + (B + C)$$
$$= (A + C) + (B + D) = 4E$$

(závorky značí, jak při konstrukci jednotlivé body spojujeme) —, můžeme na základě 2. a 3. vysloviti zajímavou větu: Spojíme-li středy vždy dvou protějších stran daného čtyřúhelníka, jakož i středy úhlopříčen, protínají se tyto příčky v jediném bodě — (bod tento zove se často středem čtyřúhelníka). Stanovený takto bod půlí každou z uvedených spojnic.

2. Obecnější větu dostaneme týmž způsobem z konstrukce těžiště bodů A, B, C, D o koefficientech a, b, c, d. Jest totiž

$$aA + bB + cC + dD = (aA + bB) + (cC + dD)$$
$$= (aA + dD) + (bB + cC) = (aA + cC) + (bB + dD)$$
$$= (a + b + c + d) E.$$

Rozdělíme-li jednu stranu AB čtyřúhelníka v libovolném poměru $b : a$, protější CD v libovolném poměru $d : c$, stranu AD v poměru $d : a$ a protější BC v poměru $c : b$, podobně úhlopříčnu AC v poměru $c : a$ a druhou BD v poměru $d : b$, procházejí spojnice vždy dvou dělících bodů v protějších stranách a dělících bodů úhlopříčen jediným bodem. Bodem tímto jsou spojnice ony děleny v poměru $(c + d) : (b + a)$, resp. $(b + c) : (a + d)$, resp. $(b + d) : (a + c)$.

Tak na př. volíme-li $a = 5$, $b = c = d = 1$, jsou příčky ty děleny v poměru $1 : 3$.

Chceme-li, aby byly děleny v určitém poměru třebas ϱ, stačí řešiti soustavu tří homogenních rovnic

$$\frac{c + d}{b + a} = \frac{b + c}{a + d} = \frac{b + d}{a + c} = \varrho.$$

Pro $\varrho = \frac{1}{2}$ vyhoví se uvedeným rovnicím na př. hodnotami $a = 3, b = c = d = 1$.

Hodnoty a, b, c, d mohou ovšem býti též záporné: Tak třebas při $a = -3$, $b = c = d = 1$ jsou příčky rozděleny v poměru $\varrho = -\frac{2}{1}$ atd.

Rozšíření této nauky pro libovolný počet bodů je — doufám — patrné. Tak třebas

$$A + B + C + D + E = 5F,$$

kdež *těžiště* F je těžištěm daného pětiúhelníka v obyčejném významu. Upouštím však od toho, jakož i od dalšího zobecnění a rozšíření, neboť mým úmyslem bylo toliko ukázati žákům středních škol prvé počátky postupu, jejž prvý naznačil Ferdinand Möbius *) (1827), a jenž v dalším vývoji stal se vlastně základem nauky zvané dnes vektorová analysis **).

Na úzkou souvislost s *fysikou* jsem poukázal již s počátku, chci jen ještě upozorniti na jednu důležitou okolnost

Z rovnice

$$\lambda A + \mu B + \nu C = (\lambda + \mu + \nu) D$$

je patrno, že dle různé volby hodnot λ, μ, ν dostanu různé body roviny, pro jednu volbu ovšem jen jediný. Bod roviny je tudíž těmi hodnotami, dán-li základní trojúhelník ABC, zcela určen. Tím dána je souvislost této nauky *s analytickou geometrií*, neboť ve smyslu analytické geometrie lze považovati hodnoty λ, μ, ν za (homogenní) souřadnice bodu v rovině.

Dvě poznámky o lichoběžníku.

Podává **Fr. Hromádko**, emer. prof.

I. *O sestrojování lichoběžníka z daných jeho stran (rozbor).*

Jak povědomo, určen jest lichoběžník čtyřmi danými součástmi, mezi nimiž třeba nejméně dvou délek (strany, úhlopříčky a nejvýše se připouštějí dva úhly a pod.). Mezi rozmanitými

*) Viz Ferdinand Möbius: Gesammelte Werke, Bd. I.

**) Viz třebas: E. Jahnke: Vorlesungen über die Vektorenrechnung, 1905.