Václav Jeřábek

O čtyřúhelníku, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 1, 102--104

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123103`

V (7) jest dáno každé řešení rovnice $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ čísly celými (kladnými i zápornými), při čemž celá čísla A, B, C, D, E libovolně můžeme voliti, pokud jenom splňují rovnici (8); nad to můžeme o A, B, resp. C, D, E předpokládati, že to jsou čísla bez společné míry. Číslo ϱ_1 jest rovněž celé a rovno některé společné míře pravých stran rovnic (7). Že C a D vskutku libovolně lze voliti, plyne z té okolnosti, že výrazy (7) splňují danou rovnici identicky, jestliže splněna (8).

Rovněž jest jasno, že ϱ_1 za předpokladů činěných pro čísla A, B může býti toliko dělitelem čísla $3C$; neboť součet prvých dvou pravých stran rovnic (7) jest $3BC$, posledních pak dvou jest $3AC$ a čísla A a B jsou bez společné míry.

Klademe-li na př. $C = 1$, $D = -1$ a dle rovnice (8) $A = 3$, $B = 1$, $E = 1$, máme tento rozklad

$$12^3 - 10^3 - 9^3 = -1^3;$$

kdybychom pak kladli $A = -3$, $B = -1$,

$$6^3 - 9^3 + 8^3 = -1^3.$$

K formulím (7) připínají se tyto úlohy, jichž řešení ponechávám čtenáři:

1. Vyšetřiti, kdy dva různé systémy čísel A, B, C, D, E resp. A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 vedou ku týmž hodnotám pro x, y, z, u anebo alespoň k hodnotám úměrným.

2. Provésti na základě (7) důkaz o nemožnosti řešení rovnice $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ čísly celými.

3. Vyhledati všecka možná *celistvá* řešení rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

O čtyřúhelníku, jehož úhlopříčny stojí na sobě kolmo.

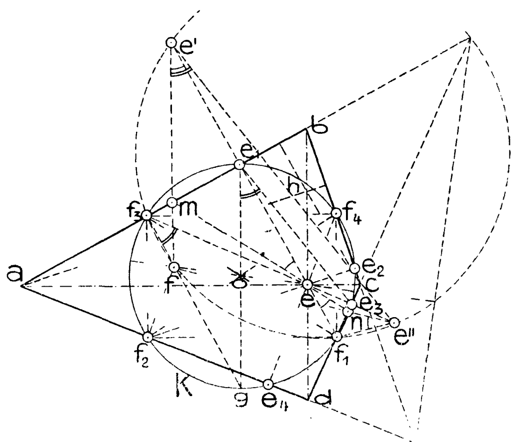
Studujícím sděluje **V. Jeřábek.**

1. ***Ve čtyřúhelníku abcd nechť stojí úhlopříčky ac a bd na sobě kolmo a v bodě e se protínají. Spustíme-li s bodu e kolmice na strany čtyřúhelníka, leží paty jejich v téže kružnici.***

Známou tuto vlastnost lze dokázati takto: Paty zmíněných kolmic (obr.) ve stranách *ab*, *bc*, *cd*, *da* buďtež e_1, e_2, e_3, e_4, patami těmito veďme ve čtyřúhelníku příčky e_1ef_1, e_2ef_2, e_3ef_3, e_4ef_4 ku protějším stranám.

Dokažme dříve, že $f_1f_2f_3f_4$ jest obdélníkem. Výšky trojúhelníka abc jdoucí vrcholy a, c protínají se v bodě h na úhlopříčně bd, jež obsahuje výšku be trojúhelníka abc. Ježto $hc \parallel e_1ef_1$ a $ha \parallel e_2ef_2$, jest

$$\frac{df_1}{dc}=\frac{de}{dh}=\frac{df_2}{da},$$



Obr. 1.

z rovnosti prvního a posledního poměru plyne, že $f_1f_2 \parallel ca$. Obdobně jest $f_2f_3 \parallel db$, $f_3f_4 \parallel ac$, $f_4f_1 \parallel bd$. Čtyřúhelník $f_1f_2f_3f_4$ jest tedy rovnoběžníkem, a poněvadž jeho strany f_1f_2, f_2f_3 jsou rovnoběžny s příslušnými úhlopříčkami kolmými ac, bd, jest $f_1f_2f_3f_4$ obdélníkem.

Opišme tomuto obdélníku kružnici K, a uvažme, že pravoúhlé trojúhelníky $f_1e_1f_3$, $f_1f_2f_3$ mají společnou přeponu f_1f_3, pak snadno nahlédneme, že bod e_1 leží na kružnici K, na které obdobně jsou též paty e_2, e_3, e_4.

2. Buď o středem kruhu K. Kolmice postavená v bodě f_2 ku ad nechť protne v bodě f kolmici vztyčenou v bodě f_3 ku ab. Strany trojúhelníků ef_1f_4, ff_3f_2 jsou souměrny dle středu o, pročež leží f souměrně k bodu e dle téhož středu. Postavíme-li

též kolmice v bodech f_1, f_4 k příslušným stranám cd, cb, bude obdobně jejich průsečík souměrný k bodu e dle o, splývá tudíž průsečík tento s bodem f.

Určeme kuželosečku ohnisky e, f a osou hlavní (fokální), která jest zároveň průměrem kruhu K. Sestrojme k ohnisku e souměrný bod e' dle strany ab, a protněme stranu tuto spojnicí $e'f$ v bodě m. Bude tedy $fm + me' = 2\overline{oe_1} = e_1g$, a poněvadž ve shodných trojúhelnících me_1e', me_1e strana $me' = me$, bude též $fm + em = e_1g$; avšak e_1g značí délku osy fokální kuželosečky, pročež přináleží této kuželosečce bod m. Z toho pak, že úhel $eme_1 = e'me_1$, soudíme dále, že ab dotýká se kuželosečky v bodě m. Tak jako ab, jsou i ostatní strany čtyřúhelníka tečnami kuželosečky, která za tou příčinou jest čtyřúhelníku vepsána.

Nyní dokážeme, že spojnice dotyčných bodů dvou protilehlých tečen prochází ohniskem e. K tomu cíli sestrojme bod e'' souměrně k bodu e dle tečny cd, a spojnicí fe'' v této tečně určeme dotyčný bod n. Příčka e_1e_3 půlí strany ee', ee'' trojúhelníka $ee'e''$, pročež jest $e_1e_3 \parallel e'e''$, a z téhož důvodu jsou příčky e_1o, $e'f$ v trojúhelníku $ee'f$ spolu rovnoběžny. Jest tedy úhel $fe'e'' = ge_1e_3$, a dále pak v kruhu K úhel $ge_1e_3 = gf_3e^3 \equiv ff_3e''$ (gf_3 a $ff_3 \perp ab$), pročež jest úhel $fe'e'' = ff_3e''$, leží tudíž bod f_3 na kružnici $(e'e''f)$, a totéž obdobně platí i o bodu f_1. V kružnici $(e'e''f)$ jest úhel $fe'f_1 = fe''f_1$, budou tedy i těmto úhlům rovné úhly mee_1, nef_1 stejny, a že body m, n leží po různých stranách přímky e_1ef_1, jsou body m, e, n v téže přímce, která jest polárou průsečíku tečen ab a cd. Tím vychází na jevo, že zmíněný průsečík jest na řídicí přímce kuželosečky a že totéž platí o průsečíku tečen ad, bc. Tedy:

Stojí-li úhlopříčky čtyřúhelníka na sobě kolmo, jest jejich průsečík ohniskem kuželosečky vepsané do čtyřúhelníka a mající za přímku řídicí třetí úhlopříčku *).

---

*) Zacharias „Über Vierecke mit rechtwinkeligen Diagonalen“ Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft (4. roč. str. 39—42).

Mathesis, Question 1685 (Zacharias). Solution par P. De Lepiney, A. Terracini et Van Dinter. Roč. 1909, pag. 21—22.