Václav Hübner

Stanovení povrchu pravidelného jehlanu čtyřbokého, seříznutého rovinou kolmou k jeho osovému řezu

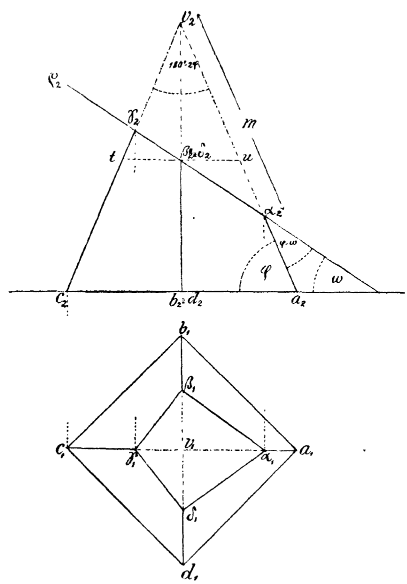
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 1, 105--108

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123100`

Stanovení povrchu pravidelného jehlanu čtyrbokého, seříznutého rovinou kolmou k jeho osovému řezu.

Podává **Václav Hübner**, c. k. professor na Král. Vinohradech.

Úloha žádá vyšetření nejprve plochy řezu a pláště seříznutého jehlanu rovinou ϱ, kolmou k jeho osovému řezu. Budiž osový řez jehlanu vac rovnoběžný s druhou průmětnou a rovina ϱ tudíž kolmá k druhé průmětně. Odchylka hran pobočných od základny (první průmětny) budiž φ a odchylka roviny ϱ od základny jehlanu budiž ω.



Obraz 1.

Řez roviny ϱ s jehlanem označme $S \equiv \alpha\beta\gamma\delta$. První průmět řezu $S_1 \equiv \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ (deltoid) jest roven $\frac{1}{2}\, \overline{\alpha_1\gamma_1} \,.\, \overline{\beta_1\delta_1}$. Ježto $\overline{\alpha_1\gamma_1} = \overline{\alpha_2\gamma_2} \cos \omega$, $\overline{\alpha_2\gamma_2} : m = \sin 2\varphi : \sin (\varphi + \omega)$ z $\triangle\, v_2\alpha_2\gamma_2$ ($m = \overline{v_2\alpha_2}$ úsek roviny ϱ na hraně $\overline{va} = \overline{v_2a_2}$), jest

$$\overline{\alpha_1\gamma_1} = \frac{m \sin 2\varphi}{\sin (\varphi + \omega)} \cos \omega.$$

Vedeme-li bodem $\beta_2 \equiv \delta_2$ příčku $\overline{tu}$ rovnoběžně s $a_2 c_2$, jest polovina této příčky $= \frac{\overline{\beta_1 \delta_1}}{2}$ a

$$\overline{\alpha_2 \beta_2} : \frac{\overline{\beta_1 \delta_1}}{2} = sin\ \varphi : sin\ (\varphi - \omega) \ldots \text{ z } \triangle\ \beta_2\ u\ \alpha_2,$$

$$\overline{\alpha_2 \beta_2} : m = cos\ \varphi : cos\ \omega \ldots \text{ z } \triangle\ v_2 \beta_2 \alpha_2,$$

z čehož

$$\frac{\overline{\beta_1 \delta_1}}{2} = \frac{m\ cos\ \varphi\ sin\ (\varphi - \omega)}{sin\ \varphi\ cos\ \omega}$$

a

$$S_1 = \frac{\overline{\beta_1 \delta_1}}{2} \cdot \overline{\alpha_1 \gamma_1} = \frac{m^2\ sin\ 2\varphi\ cos\ \varphi\ sin\ (\varphi - \omega)}{sin\ \varphi\ sin\ (\varphi + \omega)}$$
$$= \frac{2m^2\ cos^2 \varphi\ sin\ (\varphi - \omega)}{sin\ (\varphi + \omega)}.$$

Plocha řezu

$$S = \frac{S_1}{cos\ \omega} = \frac{2m^2\ cos^2\ \varphi\ sin\ (\varphi - \omega)}{cos\ \omega\ .\ sin\ (\varphi + \omega)}.$$

Plášť Π jehlanu, obsaženého mezi základnou Z a řezem S, jest dle známé poučky o průmětech určen rovnicí: $Z - S_1 = \Pi\ cos\ \psi$, značí-li úhel ψ odchylku pobočných stěn jehlanu od základny Z. Je li a délka hrany podstavné, u pobočná výška jehlanu a h délka pobočné hrany jehlanu, jest, jak známo:

$$\frac{a}{2} = u\ cos\ \psi, \quad \frac{a\sqrt{2}}{2} = h\ cos\ \varphi, \quad u = \sqrt{h^2 - \frac{a^2}{4}},$$

a tudíž

$$cos\ \psi = \frac{a}{2\sqrt{\frac{2a^2}{4\ cos^2\ \varphi} - \frac{a^2}{4}}} = \frac{cos\ \varphi}{\sqrt{2 - cos^2\ \varphi}}.$$

Plášť

$$\Pi = \frac{Z - S_1}{cos\ \psi}$$
$$= \frac{Z\ sin\ (\varphi + \omega) - 2m^2\ cos^2\ \varphi\ sin\ (\varphi - \omega)}{sin\ (\varphi + \omega)\ cos\ \varphi} \sqrt{2 - cos^2\ \varphi}$$

a povrch

$$P = \Pi + Z + S.$$

Důsledky: 1. Je-li $\omega = 0$, jest rovina $\varrho \parallel Z$,

$$S = \frac{2m^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{\sin \varphi} = 2m^2 \cos^2 \varphi$$

a $\overline{\alpha_1\gamma_1} = \overline{\beta_1\delta_1} = 2m \cos \varphi$; řez jest čtverec, jehož úhlopříčny mají délku $2m \cos \varphi$.

Plášť

$$\Pi = \frac{Z - 2m^2 \cos^2 \varphi}{\cos \varphi} \sqrt{2 - \cos^2 \varphi}.$$

2. Je-li $\varphi = 60^0$, $\omega = 30^0$, jest

$$\Pi = \frac{4Z - m^2}{4} \sqrt{7}$$

a při $m = 0$ (rovina prochází vrcholem a neprotíná jehlanu jest $\Pi = Z\sqrt{7}$ (plášť plného jehlanu).

Zavedeme-li do počtu úsek n roviny ϱ na hraně $\overline{vc}$ ($\overline{v_2\gamma_2} = n$), jest z $\triangle\, v_2\alpha_2\gamma_2$ $n : m = \sin(\varphi - \omega) : \sin(\varphi + \omega)$, pročež plášť

$$\Pi = \left(\frac{Z}{\cos \varphi} - 2mn \cos \varphi\right) \sqrt{2 - \cos^2 \varphi}$$

a plášť hořejší části

$$p = \frac{S_1}{\cos \psi} = \frac{2m^2 \cos \varphi \sin(\varphi - \omega)}{\sin(\varphi + \omega)} \sqrt{2 - \cos^2 \varphi}$$

$$= 2mn \cos \varphi \sqrt{2 - \cos^2 \varphi}.$$

Součet $\Pi + p$ dá plášť celého jehlanu

$$= \frac{Z}{\cos \varphi} \sqrt{2 - \cos^2 \varphi},$$

a ježto $Z = a^2$,

$$\frac{\sqrt{2 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos \psi} = \frac{2u}{a},$$

jest plášť celého jehlanu $= 2au$.

Jde-li o rovinu ϱ, která dělí plášť jehlanu v díly určitého poměru, na př. v díly stejné, jest $\Pi = p$, t. j.

$$\left(\frac{Z}{\cos \varphi} - 2mn \cos \varphi\right) \sqrt{2 - \cos^2 \varphi} = 2\, mn \cos \varphi \sqrt{2 - \cos^2 \varphi},$$

tudíž

$$Z - 2mn\,cos^2\varphi = 2mn\,cos^2\varphi \text{ a } Z = 4\,mn\,cos^2\varphi.$$

Z rovnice této lze při daném m, (n) stanoviti druhý úsek n, (m) roviny ϱ na hraně jehlanu.

Je-li $\varphi = 60^0$, jest $Z = mn$; značí-li a délku hrany podstavné pak $a = \sqrt{mn}$.

Drobnosti ze školní praxe.

1. Měření kapacity leydenských lahví.

Uspořádání, jehož užíváme ku výboji batterie leydenských lahví, spojené s měrnou lahví Lanné-ovou, lze užíti v praktiku k relativnímu měření kapacity leydenských lahví.

Spojme kladný pól elektriky Wimshurstovy s vnějším polepem měrné láhve, vnitřní její polep s vnějším polepem isolované leydenské láhve, jejíž kapacitu chceme měřiti, a vnitřní polep této, jakož i záporný pól elektriky spojme se zemí. Každý z obou polepů uvažované leydenské láhve spojme nad to s jedním svodičem vybíječe Hanleyova. Doskok jiskrový u měrné láhve, jakož i u vybíječe učiňme stejný (na př. 5 *mm*). Otáčíme-li elektrikou, nabíjí se měrná láhev a současně indukcí láhev leydenská.

Je-li kapacita měrné láhve c (jíž považujme za jednotku) a výbojový potenciál V, pak množství, jímž se nabije měrná láhev, jest $q = c\,.\,V$. Označíme-li kapacitu leydenské láhve C, výbojový její potenciál jest stejný, ježto dálka doskoku v obou jiskřištích jest stejná, bude množství, jímž se nabije $Q = C\,.\,V$. Srovnáním obou množství obdržíme $Q : q = C : c$, kdež poměr obou množství elektrických dán jest počtem výbojů měrné láhve, připadajících na jeden výboj láhve leydenské; lze tudíž vyjádřiti kapacitu leydenské láhve jednotkami, jež představuje kapacita měrné láhve.

Změříme-li takto kapacity různých lahví leydenských, lze pak je spojiti vedle sebe a zkoušeti, zda kapacita celé batterie rovná se součtu kapacit jednotlivých lahví.

Zvětšujeme-li doskok mezi svodiči vybíječe, vzrůstá potenciál výbojový u leydenské láhve, a vzrůstá též počet výbojů