Václav Jeřábek

O křivce horopter

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 1, 15--21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123099

podávající absolutně přesně čísla odvozená *Köppenem*. (Viz: *Hann*, Lehrbuch der Meteorologie I. vyd. Str. 377.) Pro vztah ten nebyl dosavade vůbec znám empirický vzorek.

Z fysiky patří sem, jako klasický příklad, vzorek, jímž hleděl *Magnus* vyjádřiti *souvislost mezi teplotou a tlakem vodních par*.

Pročítaje pojednání toho badatele (*Poggend*, Ann. Sv. LXI. viz také *Dove*, Repertorium. I. Sv.) čtenář nejlépe ocení důležitost zde podané methody.

Zákon Balmerův podávající stavbu spektra vodíku (viz Novák, O stavbě spekter emissních. Čas. roč. 35., str. 353) jest význačným příkladem typu kvadratického

$$v = \frac{\alpha u^2}{u^2 - \beta}.$$

Podobných příkladů mohli bychom uvésti mnoho. Aplikaci na některé problémy meteorologické a jiné najde čtenář v mých pojednáních uveřejněných toho roku v král. české učené společnosti a ve vídeňské akademii.

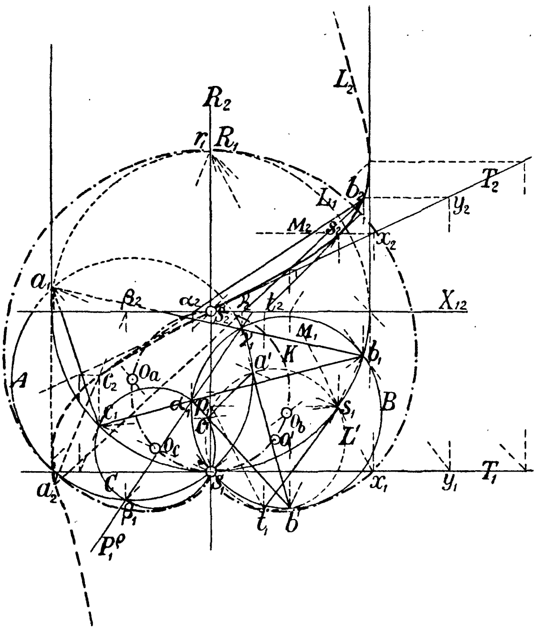
Nemalou výhodou zde uvedených vzorců jest jich jednoduchost. Mnohý problém nemohl býti dosavade řešen jen z té příčiny, poněvadž interpolační vzorce, odvozené z pozorování a vložené do příslušných rovnic differenciálních, dávaly rovnice, jež nebylo lze integrovati. (Pokračování.)

O křivce horopter.

Napsal **V. Jeřábek**.

1. Buď dán rotační válec mající svou podstavu na průmětně π (obr. 1.) v kruhu L_1 a svůj střed na ose $X_{1.2}$, v níž jest druhý průmět kruhu L_1. Na kružnici L_1 vytkněme bod $S \equiv S_1$ tak, aby jeho průmět druhý S_2 připadl do středu kruhu L_1; pak veďme bodem S některou tečnu T daného válce a sestrojme její průměty $T_1 \parallel X_{12}$, T_2. Vyznačme ještě v kruhu L_1 koncový bod průměru $S_1 S_2 r_1$, a v r_1 postavme kolmici R na průmětnu π; kolmice tato má patrně svůj průmět R_1 v r_1 a $R_2 \perp X_{12}$. Geom. místem přímek M, jež jsou s průmětnou π

rovnoběžny a protínají přímky R, T, resp. v bodech r, x, jest hyperbolický paraboloid; jeho útvary řídícími jsou tedy R, T, π a útvarem tvořícím přímka M. Plocha válce a hyp. paraboloid pronikají se v křivce stupně čtvrtého, která rozpadá se v přímku R, jež jest oběma plochám společná, a v křivku L stupně třetího*). Úběžná přímka průmětny π jest přímkou hyp. paraboloidu k soustavě přímek M náležející, a ježto přímka úběžná



Obr. 1.

má s kružnicí L_1 společné úběžné body kruhové, které křivce L náležejí, jest L křivkou cirkulárnou. Křivka tato jest ve fysiologické optice známá pod jménem *horopter***).

---

*) La *question* 1131 de M. Stuyvaert (Résolue par Audibert, Jeřábek, Buysens). Mathesis, 1898, p. 233.

**) *Stuyvaert*: „*La courbe horoptère*". Mathesis, 1903, p. 153.

Die Horopterkurve mit einer Einleitung in die Theorie der kubischen Raumkurven. Halle, M. Schilling, 1902, p. 36.

F. Schuh: *Die Horopterkurve* (Zeitschrift f. Math. u. Phys., t. 47, 1902, pp. 375—399).

Jednotlivé body s křivky L jsou určeny pronikem přímky tvořící M hyp. paraboloidu s plochou válcovou rotační kolmou ku π; jest tedy bod s_1, v němž M_1 a L_1 se protínají, průmětem bodu s, jehož průmět druhý s_2 jest vyznačen na průmětu $M_2 \parallel X_{12}$ přímky M protínající tečnu T v bodě x, jemuž přináleží první průmět $(M_1 T_1) \equiv x_1$ a druhý x_2 na T_2.

2. Tečna křivky L jest průsečnicí rovin tečných, z nichž položena jest jedna v bodě s ku válci a druhá k hyperbolickému paraboloidu. Stopa $s_1 t_1$ první roviny tečné dotýká se kruhu L_1 v bodě s_1, a směr stopy roviny tečné druhé stanoví přímka $M \parallel M_1$, neboť přímka tato v rovině tečné leží a jest s průmětnou π (rovinou řídící) rovnoběžna. Vedeme-li bodem s přímku povrchovou sp druhé soustavy hyp. paraboloidu rovnoběžně s jeho druhou rovinou řídící (TT_1), bude její průmět $s_1 p_1$ $(p \equiv p_1)$ rovnoběžný s T_1, a průsečík p_1 tohoto průmětu se stopou $Sr \equiv S_1 r_1$ hyp. paraboloidu vyznačuje stopu přímky sp. Sestrojíme-li tedy stopou $p \equiv p_1$ rovnoběžku k $r_1 s_1$, dostaneme stopu $pt \equiv p_1 t_1$ druhé roviny tečné. Bod $t \equiv t_1$ jest však stopou hledané tečny st; zobrazíme-li tedy na X_{12} druhý průmět t_2 stopy t, bude spojnice $s_2 t_2$ tečnou křivky L_2 v bodě s_2.

3. *Geom místo bodu* $t \equiv t_1$. Úhel $S_1 s_1 t_1 = S_1 r_1 s_1 = S_1 p_1 t_1$, pročež leží body $S_1 t_1 s_1 p_1$ na kružnici o středu o' a průměru $S_1 o' s_1$. Ježto úhel $S_1 t_1 s_1$ jest pravý, jest geom. místem bodu t_1 úpatnice kruhu L_1 vzhledem k polu S_1. Úpatnice tato je tudíž *kardioidou* mající svůj bod úvratu v bodě S_1; $S_1 r_1$ jest její osou.

Přijde-li s_1 po kružnici L_1 do bodu r_1, stane se s bodem úběžným křivky L ve směru přímky $R \perp \pi$, a že s bodem $R_1 \equiv r_1$ splývá též proměnný bod t_1, má L v přímce R svou asymptotu, která na průmětnu druhou promítá se do asymptoty $R_2 \perp X_{12}$ průmětu L_2.

4. Z každého svého bodu s promítá se křivka L plochou kuželovou stupně druhého, neboť rovina proložená bodem s může míti s křivkou kubickou L toliko dva další body společné, takže ona protíná plochu promítajícího kužele jen ve dvou přímkách povrchových. Je tudíž průmětem L' křivky L z bodu s na π kuželosečka, jež prochází bodem S_1 a úběžnými body kruhovými průmětny π, které křivce L náležejí. Je tedy L'

kružnicí. Ježto bod $t \equiv t_1$ jest centr. průmětem bodu křivky ku s soumezného, prochází L' též bodem t_1; avšak do s_1 promítá se z bodu s úběžný bod křivky, pročež leží též s_1 na L'. Kružnice L' je totožna s kružnicí $(S_1 t_1 s_1 p_1)$ v odst 3. povšimnutou, neboť má s ní společné body S_1, t_1, s_1. V odst. 3. bylo uvedeno, že $S_1 o' s_1$ je průměrem kruhu $(S_1 t_1 s_1 p_1) \equiv L'$, půlí tedy o' tětivu $S_1 o' s_1$ kruhu L_1, a za tou příčinou leží o' na kružnici K mající $S_1 S_2$ za průměr. Pročež:

Z každého svého bodu s promítá se křivka L na rovinu π kolmou k její asymptotě R do kružnice L' mající tětivu $S_1 s_1$ kruhu L' za průměr, a geom. místem jejího středu o' jest kružnice K nad průměrem $S_1 S_2$ sestrojená.

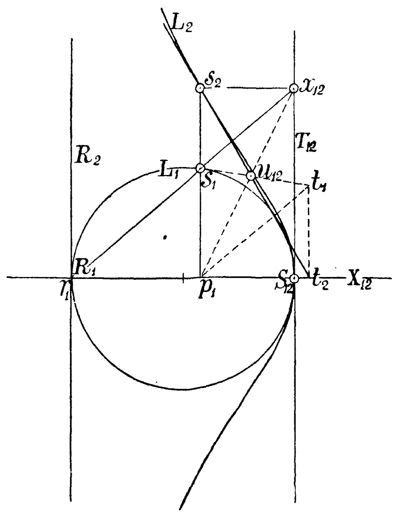
5. Vytkněme na L kterékoliv tři body a, b, c a jejich průměty prvé a_1, b_1, c_1 na L_1, druhé pak a_2, b_2, c_2 sestrojme týmž způsobem jako s_2 ze zvoleného s_1 na L_1. Znamenejme α, β, γ stopy přímek bc, ca, ab jimi vzniklé na π, a sestrojme jejich průměty $\alpha_2 \alpha_1$, $\beta_2 \beta_1$, $\gamma_2 \gamma_1$; pak jest $P^\varrho \equiv P_1^\varrho \equiv (\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$ stopou roviny ϱ trojúhelníka abc.

Promítněme nyní z vrcholu a křivku L na π do kružnice A, při tom promítá se úběžný bod křivky L do a_1, b do $\gamma \equiv \gamma_1$ a c do $\beta \equiv \beta_1$; jsou tedy body $a_1 \beta_1 S_1 \gamma_1$ na kružnici $A \equiv A_1$, jejímž středem o_a jest průsečík tětivy $S_1 a_1$ s kružnicí K. Obdobně jest stanovena body $b_1 \gamma_1 S_1 \alpha_1$ kružnice $B \equiv B_1$ o středu o_b a body $c_1 \alpha_1 S_1 \beta_1$ kružnice $C \equiv C_1$ o středu o_c. Jeví se tudíž křivka L jakožto pronik ploch kuželů (aA), (bB), (cC).

Promítneme-li ze středu s trojúhelník abc do trojúhelníka $a'b'c'$, bude vrchol a' na A určen paprskem $s_1 a_1$, vrchol b' na B spojnicí $s_1 b_1$ a c' na C tětivou $s_1 c_1$. Úhly trojúhelníků $a_1 b_1 c_1$, $a'b'c'$ při vrcholech a_1, a' jsou výplňky úhlu vepsaného čtyřúhelníka $a_1 \beta_1 a' \gamma_1$ při vrcholu a', pročež jsou stejny. Též úhly trojúhelníků řečených jsou při vrcholech b_1, b' stejny, protože jsou obvodovými úhly kruhu B nad obloukem $\alpha_1 \gamma_1$. Z toho vyplývá, že trojúhelníky $a_1 b_1 c_1$, $a'b'c'$ jsou podobny. Ježto souhlasné jejich strany, po případě v prodloužení, protínají se v pevných bodech α_1, β_1, γ_1 stopy $P^\varrho \equiv P_1^\varrho$, jsou perspektivně kollineárné dle středu s_1 a osy P_1^ϱ.

Myslíme-li si, že bod s po křivce L se pohybuje, kdežto vrcholy trojúhelníka abc jsou pevné, zůstává centrálný průmět tohoto trojúhelníka stále podoben trojúhelníku $a_1b_1c_1$ a jest s ním a s každou svou další polohou perspektivně kollineárný dle osy P_1^0 a středu s_1, který vyplňuje kružnici L_1. Tedy:

Vytkneme-li na křivce horopter L pevné vrcholy trojúhelníka abc, promítá se tento trojúhelník z bodů s křivky L na rovinu kolmou k její asymptotě R do trojúhelníků $a'b'c'$ navzájem podobných a persp. kollineárných dle pevné osy P_1^0 a středů s_1, jejichž geom. místem jest kružnice L_1 opsaná trojúhelníku $a_1b_1c_1$, do něhož promítá se orthogonálně trojúhelník abc.



Obr. 2.

Budiž ještě podotknuto, že spojnice $a't_1$, $b't_1$, $c't_1$ jsou stopami rovin tečných kuželů (aA), (bB), (cC), pročež se řečené spojnice dotýkají kružnic A, B, C v příslušných vrcholech a', b', c' trojúhelníka $a'b'c'$.

6. Zvolíme-li průměr r_1S_{12} (obr. 2.) kruhu L_1 na X_{12} a tečnu T válce v bodě S_{12} v rovině totožnosti, tedy $T_1 \equiv T_2 \equiv T_{12}$, protínají se $M_1 \equiv r_1s_1$, $M_2 \equiv s_2x_{12} \parallel X_{12}$ na T_{12} v x_{12}, a s_1s_2 stojí kolmo na X_{12}. Lze tedy sestrojiti jednotlivé body s_2 křivky L_2 takto:

Budiž dán kruh L_1, jeho průměr r_1S_{12} a tečna T_{12} v bodě S_{12}. Bodem r_1 vedený paprsek M_1 protíná ještě kružnici L_1

v bodě s_1 *a tečnu* T_{12} *v* x_{12}; *rovnoběžka* $M_2 \parallel X_{12}$ *sestrojená bodem* x_{12} *protíná přímku* $s_1 s_2 \perp X_{12}$ *v bodě* s_2 *křivky* L_2.

Z konstrukce této jde na jevo, že křivka L_2 jest *versierou**).

Zobrazíme-li obdobně jako v obr. 1. stopu $pt \equiv p_1 t_1 \parallel r_1 s_1$ roviny tečné hyp. paraboloidu v bodě s a stopu $st \equiv s_1 t_1$ (tečna kruhu L_1) roviny dotýkající se v témž bodě s plochy válcové, jest průsečík $t \equiv t_1$ těchto stop stopou tečny st křivky L. Zobrazíme-li tedy t_1 a pak t_2 na X_{12}, bude $s_2 t_2$ tečnou křivky L_2 v bodě s_2. Ježto px jest stopu roviny tečné hyp. paraboloidu v rovině totožnosti, musí stopa u tečny st v rovině totožnosti ležeti na px, tedy jest průsečík $(s_1 t_1, s_2 t_2) \equiv u_{12}$ na $p_1 x_{12}$, Obdržíme tudíž tečnu $s_2 t_2$ snadno tím, spojíme-li bod u_{12}, v němž tečna kruhu $s_1 t_1$ protíná $p_1 x_{12}$, s bodem s_2. Že $s_1 t_1$, $s_2 t_2$, $p_1 x_{12}$ protínají se v témž bodě u_{12}, vysvítá též z homothetických trojúhelníků $s_1 s_2 x_{12}$, $t_1 t_2 p_1$ **).

7. Zvolme průmětny π, ν za roviny souřadnic xy, xz a střed S_2 kruhu L_1 o poloměru r za počátek.

Přímka M má rovnice

$$y = mx - r, \; z = t,$$

a rovnice tečny T jsou

$$y = r, \quad z = px.$$

Aby se přímky M, T protínaly, platí podmínka

$$\frac{2r}{m} = \frac{t}{p},$$

vyloučíme-li m, t z předešlých rovnic, doděláme se rovnice

$$yz + zr - 2rpx = 0$$

hyperbolického paraboloidu.

Rovnice plochy válcové jest

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

---

*) *Dr. G. Loria, F. Schütte:* „Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven“, Leipzig, B. G. Teubner, 1902, pag. 75.

F. G. Teixeira: „Traité des courbes spéciales remarquables“. pag. 108. Coïmbre. Imprimérie de l'Université, 1908.

Dr. *H. Wieleitner*: „Spezielle ebene Kurven“, p. 43.

**) Totéž, co jsme v odstavci 6. uvedli, zůstává v platnosti, je-li místo kružnice L_1 dána křivka jakákoliv.

Těmito rovnicemi jest křivka L stanovena; průmět její L_2 dostaneme, vyloučíme-li z nich souřadnici y, má tedy L_2 rovnici

$$xz^2 + 4pr^2(px - z) = 0,$$

z níž je patrno, že počátek souřadnic jest bodem obratu, osa $Z \equiv R_2$ její asymptotou a úběžný bod osy $X \equiv X_{12}$ isolovaným bodem dvojným.

Obdobně lze obdržeti rovnici versiery. Zvolíme-li však $X \equiv X_{12}$ a $R_2 \equiv Y$ za osy souřadnic (obr. 2.), bude

$$\frac{s_2 p_1}{s_1 p_1} = \frac{2r}{r_1 p},$$

a položíme li $r_1 p_1 = x$, $p_1 s_2 = y$, obdržíme rovnici křivky L_2

$$\frac{y}{\sqrt{x(2r - x)}} = \frac{2r}{x},$$

čili

$$xy^2 = 4r^2(2r - x).$$

O zvláštní ploše sborcené.

Frant. Kadeřávek, assistent české techniky v Praze.

Budiž dán rotační válec **V** o ose O kolmé k průmětně π a na něm svítící bod s. Jest vyšetřiti sborcenou plochu vyplněnou paprsky, které se od daného válce pouze jedenkráte odrazily a to v bodech jeho půdorysné stopy K.

Daná plocha jest dle roviny (sO) souměrna a abychom sestrojili některou její površku, veďme bodem s (viz znázorňující obr. 1[a] i obr. 1., kde sestrojen toliko půdorys, protože nárysu k následnímu netřeba) libovolný paprsek, protínající kružnici K v bodě a, ve kterémž sestrojme normálu N daného válce, s bodu s spusťme na ni kolmici $\overline{sb}$, kterouž prodlužme o touž délku do bodu a'; pak spojnice $\overline{aa'} \equiv A$ jest odražený paprsek, a tedy žádaná površka. Jeť úhel $\overline{saN} = NA$, a paprsek A jest v rovině (sN), jak toho zákony odrazu vyžadují. Ale bod a' spadá rovněž do daného válce a má od průmětny π touž vzdálenost jako bod s, z čehož plyne, že