Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jaroslav Doležal

Věta Dandelinova a její aplikace. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 1, 91--98

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123097

platné pro výseč platí eo ipso též pro příslušný souřadnicový pruh, jak patrno z rovnosti obsahů.

Úloha čís. 1. Daný pruh (výseč) má se rozpůliti.

Začíná-li pruh u hyperbolického bodu M_0 (ξ_0, η_0) a končí u $M(\xi, \eta)$, jest úsečka hledaného bodu M_1 (ξ_1, η_1) dána úměrou

$$\xi_0 : \xi_1 = \xi_1 : \xi,$$

čili

$$\xi_1 = \sqrt{\xi_0 \xi},$$

kterážto rovnice nám dostatečně naznačuje, kterak by se hledaný bod měl konstruovati. (Pokračování.)

Věta Dandelinova a její applikace.

Napsal prof. **Jaroslav Doležal.**

Slavný *Chasles* ve svém krásném díle: „*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*“ na str. 286 a 287 uvádí větu *Dandelinovu* v tomto znění:

„*Sečeme-li rotační kužel rovinou ϱ a vepíšeme-li kuželi tomu dvě koule, jež dotýkají se zároveň roviny ϱ, jsou dotyčné body koulí a roviny ϱ ohnisky řezu; roviny dotyčných kružnic koulí a kužele sekou rovinu řezu o ve dvou přímkách, jež jsou řídícími přímkami řezu.*“

Věta tato, jejíž důkaz uvádí se v deskriptivní geometrii pro střední školy [1]), vede k velmi pěkným důsledkům, jež dále uvedeme, a zaslouží, aby jí při vyučování geometrii více pozornosti bylo věnováno, na což zvláště upozorňujeme.

Důkaz známý odjinud, zde pouze doplníme.

Budiž dán kužel rotační osou $\overline{sv}$ v II. průmětně, rovina řezu ϱ pak nechať jest k II. průmětně kolmá; úsečka $\overline{ab}$ stopy N^ϱ jest pak druhým průmětem řezu. (Obr. 1.)

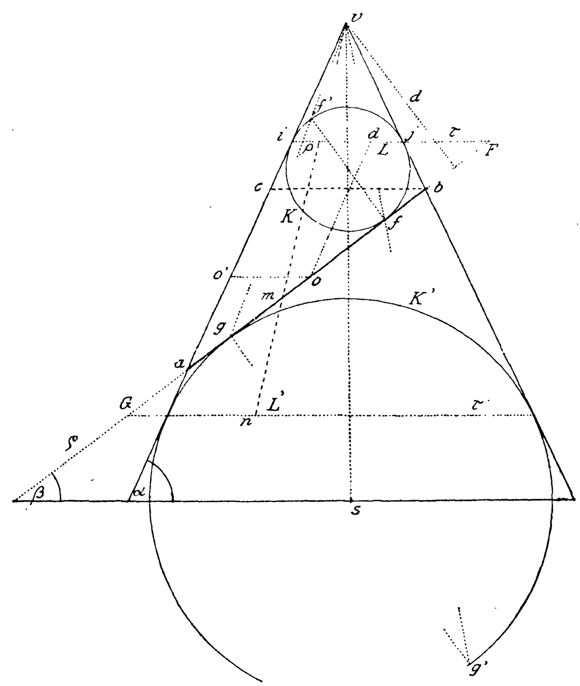
Tvar řezu záleží, jak známo, na odchylce roviny řezu od základny; svírá-li strana kužele se základnou úhel α, rovina řezu

*) Viz na př. učebnici p. prof. V. Jarolímka: Deskript. geometrie pro vyšší reálky, str. 148.

úhel β, vznikne řez *elliptický* při $\beta < \alpha$, *parabolický* při $\beta = \alpha$ a *hyperbolický* při $\beta > \alpha$.

Vepsané koule K, K' dotýkají se roviny ϱ v bodech f, g (*ohniskách* řezu), kužele pak podél kružnic L, L', jichž II. průměty vyjádřeny jsou úsečkami $\overline{ij}$, $\overline{kl}$; roviny τ, τ' těchto kružnic sekou rovinu řezu ϱ v přímkách F, G kolmých ku druhé průmětně (*přímkách řídících* řezu), jichž II. průměty jsou body F, G.

Obr 1.



Budiž dále m jeden bod řezu elliptického E, povrchová přímka $\overline{mv}$ nechť protne dotyčné kružnice resp. roviny τ a τ' v bodech n, p.

Stanovme posléze střed o řezu a veďme krajním bodem (vrcholem) b řezu přímku $\overline{bc}$ rovnoběžnou ku základně, jež protne obrysovou přímku $\overline{av}$ vrcholu a v bodu c.

I jest pak, položíme-li

$$\overline{ab} = 2a = \text{hlavní ose řezu},$$
$$\overline{fg} = 2e = \text{ohniskové vzdálenosti řezu},$$

patrně

$$\overline{mn} = \overline{mg} = (\text{tečny z bodu } m \text{ ku kouli } K')$$
$$\overline{mp} = \overline{mf} = (\text{ „ \quad „ } m \text{ „ \quad „ } K)$$

tedy

$$\overline{mf} + \overline{mg} = \overline{mn} + \overline{mp} = \overline{np} = \overline{ki} = \overline{lj},$$

a ježto dále

$$\overline{ak} = \overline{ag} \;(\text{tečny z bodu } a \text{ ku kouli } K')$$
$$\overline{bl} = \overline{bg} \;(\text{ „ \quad „ } b \text{ „ \quad „ } K')$$
$$\overline{af} = \overline{ai} \;(\text{ „ \quad „ } a \text{ „ \quad „ } K)$$
$$\overline{bf} = \overline{bj} \;(\text{ „ \quad „ } b \text{ „ \quad „ } K)$$

jest

$$\overline{bf} = \overline{jl} - \overline{bl} = \overline{ab} - \overline{bg} = \overline{ag},$$
$$\overline{ac} = \overline{ai} - \overline{ci} = \overline{af} - \overline{ag} = \overline{fg},$$

čili posléze

$$\overline{mn} + \overline{mp} = \overline{ab} = 2a$$
$$\overline{ac} = \overline{fg} = 2e.$$

Je-li o' střed úsečky $\overline{ac}$, $\overline{od} \# \overline{o'i}$, jest

$$\triangle\, oao' \sim \triangle\, Fod$$

pročež

$$\overline{oF} : \overline{od} = \overline{oa} : \overline{ao'},$$

$$\overline{oF} = \frac{\overline{od} \,.\, \overline{oa}}{\overline{ao'}} = \frac{a^2}{e}.$$

Jsou tedy body f, g ohniska, body F, G II. průměty řídících přímek *elliptického* řezu E.

Trojúhelník abc, v němž $\overline{ab} = 2a$, $\overline{ac} = 2e$,

$$\sphericalangle\, abc = \beta, \qquad \sphericalangle\, acb = 2R - \alpha,$$

tedy

$$sin\,\alpha : sin\,\beta = a : e \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

nazveme **charakteristickým trojúhelníkem řezu.**

Vztyčíme-li v ohnisku f průměr $\overline{ff'}$ koule K kolmý ku rovině ϱ a v ohnisku g průměr $\overline{gg'}$ koule K' kolmý ku rovině ϱ, jsou centrálné průměty bodů f', g' z centra v na rovině ϱ body g, f, ježto vrchol kužele v jest středem podobnosti koulí K, K'.

Pošine-li se rovina řezu ϱ rovnoběžně, budou ohniska nového řezu následkem podobnosti $\triangle$ charakterist. opětně na přímkách $\overline{fv}$ resp. $\overline{gv}$. Lze tedy větu Dandelinovu vysloviti také v jiné známé formě. Považujeme-li vrchol v za *zdroj světla* a rovinu ϱ (resp. $\varrho' \parallel \varrho$) za *rovinu stínu,* zní tato věta:

Ohniska vrženého stínu koule K na rovinu ϱ jsou vrženými stíny krajních bodů f, f' průměru kolmého ku rovině stínu.

Zároveň patrna tu z podobnosti charakteristických trojúhelníků známá věta:

Rovnoběžné řezy rovinné na kuželi rotačním jsou kuželosečky podobné a podobně položené.

Nazveme-li d vzdálenost vrcholu v od roviny ϱ, vedlejší osu řezu elliptického $2b$, a parametr $\frac{b^2}{a} = p$, jest patrně, ježto v $\triangle\, abv$ jest

$$\sphericalangle\, abv = \alpha + \beta, \qquad \sphericalangle\, bav = \alpha - \beta,$$

$$d = \overline{av} \,.\, sin\,(\alpha - \beta) = 2a \,.\, \frac{sin\,(\alpha + \beta) \,.\, sin\,(\alpha - \beta)}{sin\,2\alpha}. \quad (2)$$

Ježto řez jest *ellipsou,* jest čtverec vedlejší poloosy

$$b^2 = a^2 - e^2 = (a + e)\,(a - e) = \frac{a^2}{sin^2\,\alpha}\, sin\,(\alpha + \beta) \,.\, sin\,(\alpha - \beta), \quad (3)$$

tudíž parametr

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{sin^2\,\alpha} \cdot \frac{d \,.\, sin\,2\alpha}{2} = d \,.\, cotg\,\alpha. \quad (4)$$

Z rovnice (4) patrno, že *parametr řezu nezáleží na velikosti úhlu β (odchylce rov. řezu od základny),* nýbrž toliko na vzdálenosti roviny řezu od vrcholu kužele. Lze tedy vysloviti větu:

Všechny rovinné řezy rotačního kužele, mající od vrcholu jeho stejnou vzdálenost d, mají týž parametru = poloměr povrchové kružnice, jejíž rovina má od vrcholu rovněž vzdálenost d.

Polohu roviny řezu ϱ stanovme nyní jen *vzdáleností od vrcholu kužele* $= d$ *a odchylkou od základny* $= \beta$, i lze na základě rovnic (1) — (4) řešiti úlohu:

1. **Stanoviti osy (parametr) rovinného řezu rotačního kužele.** [1])

Z rovnice (2) vychází ihned *hlavní osa*

$$2a = \frac{d \,.\, sin\, 2\alpha}{sin\,(\alpha + \beta) \,.\, sin\,(\alpha - \beta)},$$

z rovnice (1) *výstřednost*

$$2e = 2a \,.\, \frac{sin\,\beta}{sin\,\alpha} = \frac{2d \,.\, sin\,\beta\, cos\,\alpha}{sin\,(\alpha + \beta) \,.\, sin\,(\alpha - \beta)},$$

z rovnice (4) *parametr*

$$p = d \,.\, cotg\,\alpha,$$

a z rovnice (3) a (4) *vedlejší osa*

$$2b = 2\sqrt{ap} = \frac{2d \,.\, cos\,\alpha}{\sqrt{sin\,(\alpha + \beta) \,.\, sin\,(\alpha - \beta)}}.$$

Z výsledků těchto patrno, že obě *poloosy jsou reálné a konečné*, pokud $\beta < \alpha$ (řez jest *ellipsa*); obě *poloosy jsou reálné a nekonečné*, je-li $\beta = \alpha$ (řez jest *parabola*); *imaginárnou* stává se *poloosa vedlejší* při $\beta > \alpha$ (řez jest *hyperbola*). V každém případě však jest *parametr řezu určitý a konečný*, pokud $d > 0$.

Vzdálí-li se vrchol kužele v do nekonečna, stává se vzdálenost roviny ϱ od vrcholu $d = \infty$, *charakteristický* $\triangle$ *abc stává se pravoúhlým* a platí opětně rovnice (1), ježto pak $\sphericalangle\, \alpha = 90^0$, jest (obr. 5.)

$$e : a = sin\,\beta : 1,$$
$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = a \,.\, cos\,\beta = r,$$

[1]) Upozorňujeme zde na pěkný článek o témže thematě od p. prof. V. Hübnera, uveřejněný v tomto časopise roč. XXVII.

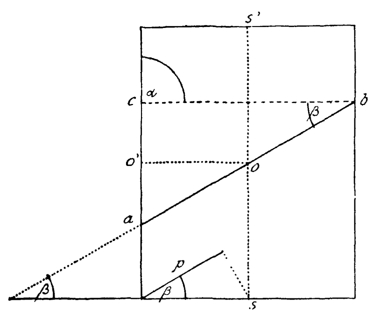
značí-li r poloměr základny, *parametr* řezu pak

$$p = \frac{b^2}{a} = r \,.\, cos\, \beta.$$

Poněvadž poměr $\frac{e}{a} = sin\, \beta < 1$, může *rovinným řezem rotač. válce býti* z kuželoseček toliko *ellipsa*.

Aby řez byl *kružnicí*, musí $a = b$, tedy $e = 0$, což vymáhá $sin\, \beta = 0$, $\beta = 0$; rovina řezu jest *rovnoběžna se základnou* kužele (válce).

Obr. 5.



Sklon $2\, \varphi$ *asymptot řezu* (hyperbolického) určen jest na př. rovnicí

$$cos\, \varphi = \frac{a}{e} = \frac{sin\, \alpha}{sin\, \beta};$$

z rovnice té patrno, že *pro hyperbolický řez* musí býti $cos\, \varphi < 1$, tedy $\beta > \alpha$.

Je-li $\beta = \alpha$, $cos\, \varphi = 1$, $\varphi = 0$, řez jest *parabolický*.

Rovnice $cos\, \varphi = \frac{sin\, \alpha}{sin\, \beta}$ užiti lze, ježto *na vzdálenosti* d *nezávisí*, i při $d = 0$; jest pak $2\, \varphi$ *úhel povrchových přímek vrcholového řezu*, jehož rovina svírá se základnou $\sphericalangle\, \beta$.

Je-li při $d = 0$, $\beta = 90^0$, jest

$$cos\, \varphi = sin\, \alpha, \quad \varphi = 90^0 - \alpha,$$

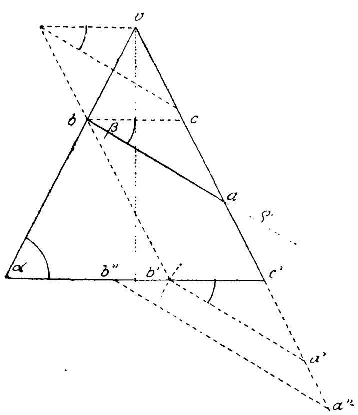
řez stává se *osovým*. Je-li při $d = 0$, $\beta = \alpha$, jest

$$\cos \varphi = 1, \ \varphi = 0,$$

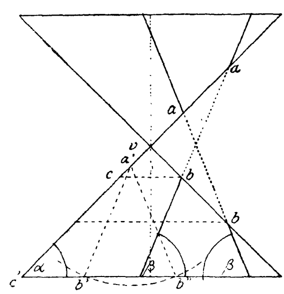
řez skládá se *ze 2 přímek splývajících* (rovina ϱ *jest rovinou tečnou* kužele neb válce).

Je-li posléze při $d = 0$, $\beta < \alpha$, jest celý řez *imaginárný*, ježto $\cos \varphi > 1$.

Obr. 2.



Obr. 3.



Rovnic (1) — (4) lze dále užiti k řešení úlohy:

2. **Rotační kužel protnouti v kuželosečce daného tvaru (i velikosti).** [1]

Řešení, pokud se jedná o řez *elliptický* neb *hyperbolický*, podává *sestrojení charakteristického* $\triangle$ *abc* (obr. 2. a 3.), ve kterém

$$\sphericalangle\, acb = 2\,R - \alpha \quad \text{(při ellipse)},$$
$$\sphericalangle\, acb = \alpha \quad (\text{„ hyperbole}),$$

a poměr

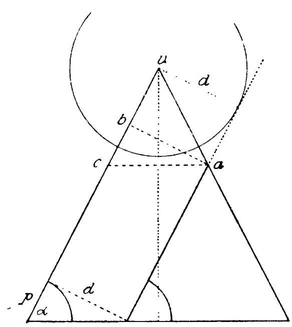
$$\overline{ac} : \overline{ab} = e : a = \sin \beta : \sin \alpha.$$

[1]) Viz pěkné pojednání prof. K. Pelze: „Note zur Abhandlung über die Fokalkurven des Quetelet“, uveřej. v „Sitzungsberichte der k. Akademie in Wien“, svazek XCVII.

a) Je-li tedy *dán na př. poměr poloos* $a : b$, jest při *elliptickém* řezu $e : a = \sqrt{a^2 - b^2} : a$, při *hyperbolickém* řezu $e : a = \sqrt{a^2 + b^2} : a$, tedy $\triangle$ *abc určen poměrem 2 stran a úhlem proti jedné z nich*; jedná-li se o řez *elliptický*, jest úloha *jednoznačná*, ježto $a > e$; jedná-li se o řez *hyperbolický*, jest úloha *dvojznačná*, neboť $a < e$ ($\triangle$ *abc* určen poměrem 2 stran a úhlem proti kratší z nich).

V obou případech *stanoví úhel* $abc = \beta$ (*resp.* $2R - \beta$) *odchylku hledané roviny řezu* ϱ, jejíž řez s kuželem má daný tvar, od základny kužele.

Obr. 4.



b) Je-li řez určen svým *tvarem i velikostí*, řešení zůstává stejné: *charakt.* $\triangle$ *abc určen jest pak dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich* (úloha při řezu elliptickém jednoznačná, při hyperbolickém dvojznačná). Poloha hlavní osy $\overline{ab}$ jest tedy v případě, že řez má býti *shodný s danou kuželosečkou*, v osovém řezu kužele zcela *určitá, obalí tedy roviny takové zcela určitý, s daným souosý rotační kužel* (resp. dva kužele), a lze položiti již jen *jednu podmínku*, aby i rovina řezu byla dokonale určena (na př. vésti rovinu ϱ daným bodem, rovnoběžně k dané přímce a pod.).

c) Je-li dán *parametr řezu p*, pak, jak patrno z rovnice (4), jest vzdálenost d roviny řezu od vrcholu kužele v:

$$d = p \cdot tg\alpha,$$

obalují tedy roviny ϱ ***plochu kulovou o středu*** v ***a poloměru*** d **(obr. 4.).**

(Pokračování.)