Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

Řešení rovnice $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ celými čísly

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 1, 99--102

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123084

Řešení rovnice $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ celými čísly.

Poznámka ke článku stejného nadpisu od J. Jandáska z 39. ročníku Čas. pro pěst. math. a fys. od **K. Petra.**

Rovnice $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ byla zcela obecně racionálnými čísly řešena již *Eulerem* v „Novi Commentarii Academiae sc. imper. Petropolitanae, sv. VI., pro rok 1756 a 1757, str. 167. Euler dospívá k těmto výrazům pro x, y, z, u

$$\begin{aligned} nx &= (3ac + 3bc - ad + 3bd)(d^2 + 3c^2) - (a^2 + 3b^2)^2 \\ ny &= (3ac - 3bc + ad + 3bd)(d^2 + 3c^2) + (a^2 + 3b^2)^2 \\ nz &= (d^2 + 3c^2)^2 - (3ac + 3bc - ad + 3bd)(a^2 + 3b^2) \\ nu &= (d^2 + 3c^2)^2 + (3ac - 3bc + ad + 3bd)(a^2 + 3b^2) \end{aligned} \tag{1}$$

Čísla x, y, z, u těmito rovnicemi definovaná vyhovují, ať a, b, c, d, n jsou jakákoliv čísla, rovnici $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$, jak čtenář snadným počtem se může přesvědčiti. Bereme-li za a, b, c, d čísla celá a za n společnou míru pravých stran, dostáváme pro x, y, z, u čísla celá a sice dostáváme tak všecka možná řešení dané rovnice celými čísly. Eulerově řešení, jak na první pohled patrno, můžeme dáti jednodušší tvar, zavedeme-li

$$\begin{aligned} ac + bd &= Q, \quad 3bc - ad = P, \\ d^2 + 3c^2 &= N, \quad a^2 + 3b^2 = M. \end{aligned} \tag{2}$$

Pak jest

$$\begin{aligned} nx &= (3Q + P)N - M^2 \\ ny &= (3Q - P)N + M^2 \\ nz &= N^2 - (3Q + P)M \\ nu &= N^2 + (3Q - P)M \end{aligned} \tag{3}$$

při čemž mezi M, N, P, Q jest dle svrchu napsaných rovnic vztah

$$P^2 + 3Q^2 = MN. \tag{4}$$

Ať jsou P, Q jakákoliv čísla, splňují-li M, N rovnici (4), jsou výrazy (3) vždy řešením dané rovnice $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$, jakož vyplývá dosazením do této rovnice. Máme tudíž ve (3) a (4) jednodušší tvar Eulerova řešení. Vypočteme-li ze (4) na př. N a dosadíme (3), obdržíme násobíce současně jmenovatelem zlomku na pravé straně se vyskytnuvšího

$$\begin{aligned} n_1 x &= (3Q + P) N^3 - (P^2 + 3Q^2)^2, \\ n_1 y &= (3Q - P) N^3 + (P^2 + 3Q^2)^2, \\ n_1 z &= N^3 - (3Q + P)(P^2 + 3Q^2), \\ n_1 u &= N^3 + (3Q - P)(P^2 + 3Q^2); \end{aligned}$$

avšak tyto rovnice dostáváme (nehledě ku záměně n a n_1) z (1) položíme-li tam $a = P$, $b = Q$, $d = N$, $c = 0$. Vidíme tedy, že tvarem (1) jsou dána všecka řešení, i když klademe c (anebo b) rovno nulle. Tuto okolnost vytkl poprvé bez důkazu *Binet* (Comptes Rendus, sv. 12., rok 1841, str. 248 *). Eulerovo řešení psané ve tvaru (3), (4) se shoduje v podstatě s formulemi Binetovými a jest jednodušší.

Pravé strany rovnic (1) (a ovšem i rovnic (3)) dávají, jsou-li a, b, c, d čísla celá, pro nx a ny současně čísla buď sudá, buď lichá, stejně tomu jest při číslech nz, nu. Tuto okolnost lze odstraniti malou změnou postupu Eulerova, jakož v následujícím chci vyložiti.

Abychom řešili rovnici $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ celými čísly, pišme ji nejprve ve tvaru

$$x^3 + y^3 = u^3 - z^3$$

aneb

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (u - z)(u^2 + uz + z^2). \tag{5}$$

Každý dělitel výrazu $x^2 - xy + y^2$ a rovněž výrazu $u^2 + uz + z^2$ lze psáti ve tvaru $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$ (α, β čísla celá); budiž tedy největší společná míra čísel $x^2 - xy + y^2$ a $u^2 + uz + z^2$ rovna $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$ a my můžeme místo čtyř celých x, y, z, u zavésti do rovnice čtyři nová čísla a, b, c, d rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= a(\alpha - \beta) + b\beta, & u &= c(\alpha - \beta) + d\beta, \\ y &= -a\beta + b\alpha, & -z &= -c\beta + d\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

*) *Ch. Hermite* podal důkaz Binetových formulí pomocí úvah z geometrie analytické v Nouv. Annales (2), sv. 11., rok 1872, str. 5.

Čísla a, b, c, d těmito rovnicemi stanovená nemusí již býti celá, jak čtenář řešením těchto rovnic snadno nahlédne. Avšak jest

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= (a^2 - ab + b^2)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \\ u^2 + uz + z^2 &= (c^2 - cd + d^2)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \cdot \end{aligned}$$

I jsou čísla

$$A = a^2 - ab + b^2, \quad B = c^2 - cd + d^2$$

čísla celá bez společné míry. Dosazením za x, y do (5) zjednáváme si tento vztah

$$[\alpha(a + b) + \beta(-2a + b)]A = [\alpha(c + d) + \beta(-2c + d)]B,$$

aneb

$$\alpha[(a + b)A - (c + d)B] = \beta[(2a - b)A - (2c - d)B]$$

odkudž máme pro α a β

$$\begin{aligned} \varrho \,.\, \alpha &= (2a - b)A - (2c - d)B \\ \varrho \,.\, \beta &= (\ a + b)A - (\ c + d)B \ , \end{aligned}$$

kde ϱ jest číslo lomené tak volené, aby tyto rovnice dávaly pro α, β čísla celá. Dosadíme-li do (6) za α, β, dostáváme po jednoduché úpravě tyto výsledky

$$\begin{aligned} \varrho x &= A^2 + B(-ac + 2ad - bc - bd), \\ \varrho y &= -A^2 + B(ac + ad - 2bc + bd), \\ \varrho u &= B^2 + A(-ac + 2ad - bc - bd), \\ -\varrho z &= -B^2 + A(ac + ad - 2bc + bd). \end{aligned}$$

Zavedeme ještě k vůli stručnosti

$$ad - bc = \frac{C}{E}, \quad ac - bc + bd = \frac{D}{E},$$

kde C, D a E jsou čísla celá a tedy E společný jmenovatel (nejmenší) čísel $ad - bc$, $ac - bc + bd$. Pak výrazy pro x, y, z, u se přemění (násobíme-li ještě obě strany rovnic E) v tento výsledný tvar

$$\begin{aligned} \varrho_1 x &= \ \ A^2E + B(2C - D) \\ \varrho_1 y &= -A^2E + B(\ C + D) \\ \varrho_1 u &= \ \ B^2E + A(2C - D) \cdot \\ -\varrho_1 z &= -B^2E + A(C + D) \end{aligned} \tag{7}$$

Mezi celými čísly A, B, C, D, E jest vztah

$$C^2 - CD + D^2 = ABE^2. \tag{8}$$

V (7) jest dáno každé řešení rovnice $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ čísly celými (kladnými i zápornými), při čemž celá čísla A, B, C, D, E libovolně můžeme voliti, pokud jenom splňují rovnici (8); nad to můžeme o A, B, resp. C, D, E předpokládati, že to jsou čísla bez společné míry. Číslo ϱ_1 jest rovněž celé a rovno některé společné míře pravých stran rovnic (7). Že C a D vskutku libovolně lze voliti, plyne z té okolnosti, že výrazy (7) splňují danou rovnici identicky, jestliže splněna (8).

Rovněž jest jasno, že ϱ_1 za předpokladů činěných pro čísla A, B může býti toliko dělitelem čísla $3C$; neboť součet prvých dvou pravých stran rovnic (7) jest $3BC$, posledních pak dvou jest $3AC$ a čísla A a B jsou bez společné míry.

Klademe-li na př. $C = 1$, $D = -1$ a dle rovnice (8) $A = 3$, $B = 1$, $E = 1$, máme tento rozklad

$$12^3 - 10^3 - 9^3 = -1^3;$$

kdybychom pak kladli $A = -3$, $B = -1$,

$$6^3 - 9^3 + 8^3 = -1^3.$$

K formulím (7) připínají se tyto úlohy, jichž řešení ponechávám čtenáři:

1. Vyšetřiti, kdy dva různé systémy čísel A, B, C, D, E resp. A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 vedou ku týmž hodnotám pro x, y, z, u anebo alespoň k hodnotám úměrným.

2. Provésti na základě (7) důkaz o nemožnosti řešení rovnice $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ čísly celými.

3. Vyhledati všecka možná *celistvá* řešení rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

O čtyřúhelníku, jehož úhlopříčny stojí na sobě kolmo.

Studujícím sděluje **V. Jeřábek.**

1. *Ve čtyřúhelníku abcd nechť stojí úhlopříčky ac a bd na sobě kolmo a v bodě e se protínají. Spustíme-li s bodu e kolmice na strany čtyřúhelníka, leží paty jejich v téže kružnici.*

Známou tuto vlastnost lze dokázati takto: Paty zmíněných kolmic (obr.) ve stranách ab, bc, cd, da buďtež e_1, e_2, e_3, e_4,