František Josef Studnička

Objasnění Borchardtovy poučky o jakosti kořenů algebraických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 4, 237--246

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123067

Objasnění Borchardtovy poučky o jakosti kořenů rovnic algebraických.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

Na str. 120. XXVI. roč. tohoto časopisu jsem poznamenal, že *počet znaménkových změn, jež poskytuje řada*

$$(1) \qquad \sigma\Delta_1,\ \sigma\Delta_2,\ \sigma\Delta_3,\ \ldots,\ \sigma\Delta_n,$$

v níž σ zastupuje slovo „signum", a obecně platí

$$(2) \qquad \Delta_k \equiv \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \ldots, & s_{k-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & \ldots, & s_k \\ s_2, & s_3, & s_4, & \ldots, & s_{k+1} \\ \vdots \\ s_{k-1}, & s_k, & s_{k+1}, & \ldots, & s_{2k-2} \end{vmatrix}$$

udává počet dvojic soujemných kořenů sdružených, jež obsahuje algebraická rovnice stupně n-tého s koëfficienty reálními

$$(3) \qquad x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1} x + c_n = 0,$$

jejíchž n kořenů značí veličiny číselné

$$(4) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,$$

takže prvky determinantu souměrného (2) dány vzorcem

$$(5) \qquad s_k = a_1^k + a_2^k + a_3^k + \ldots + a_n^k,$$

z něhož plyne především

$$s_0 = n$$

a tedy pro řadu (1) charakteristickým zjevem jest

$$(6) \qquad \sigma\Delta_1 = + \, .$$

Poučka tato, již *C. W. Borchardt* poprvé uveřejnil v pojednání svém *„Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes* (*Liouville*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, T. XII. pag. 50—67, 1847)*), dokazuje se obyčejně na základě Sturmově, chápe se však i přímo ze složení determinantu (2), nahradíme-li hodnotu jeho příslušným součinem, v němž objevují se činitelové z kořenů rovnice složení. Jestiť dle známého pravidla

$$(7) \quad \Delta_n \equiv (a_2 - a_1)^2 (a_3 - a_1)^2 (a_3 - a_2)^2 \ldots (a_n - a_{n-1})^2,$$

z čehož plyne, že determinantní členové řady (1) jsou funkcemi kořenů (4), a že tedy jakost těchto hodnot zračiti se musí v jakosti výrazů oněch.

Především tu jde na jevo ze složení součinu (7), že všichni členové řady (1) mají označení *positivní*, jsou-li všechny kořeny rovnice (3) *reální*; neb rozdíl reálních veličin jest reálním a čtverec jeho tedy *positivním.*

Kdyby však rovnice (3) obsahovala 2m kořeny *soujemné*, dejme tomu

$$\begin{array}{ccc} u_1 & \text{a} & \mathrm{K}(u_1), \\ u_2 & \text{a} & \mathrm{K}(u_2), \\ u_3 & \text{a} & \mathrm{K}(u_3), \\ \ldots & & \ldots \\ u_m & \text{a} & \mathrm{K}(u_m), \end{array}$$

kdež symbolem K vyznačena *sdruženost* neboli *konjugovanost* **), pak objeví se v řadě (1) i členové s označením *negativním*, a vyskytnou se v ní tedy znaménkové změny, jakož snadno lze poznati z úvahy této:

Součin (7) vyjádřiti možná, značíme-li veličiny soujemné opět literou u, tvarem rozlišeným, na př.

---

*) Borchardts „Gesammelte Werke", pag. 15—30.

**) Viz: *Studnička* „Algebra pro vyšší třídy škol středních" I. vyd. pag. 61. Kde věc jasna, vynechávají se závorky (Ku).

$$
(8)\quad \begin{aligned}
\varDelta_n = \; & (a_2 - a_1)^2 \\
& \times (a_3 - a_1)^2 (a_3 - a_2)^2 \\
& \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& \times (a_k - a_1)^2 (a_k - a_2)^2 \ldots (a_k - a_{k-1})^2 \\
& \times (u_1 - a_1)^2 (u_1 - a_2)^2 \ldots (u_1 - \mathrm{K}u_1)^2 \\
& \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& \times (u_2 - a_1)^2 (u_2 - a_2)^2 \ldots (u_2 - \mathrm{K}u_2)^2 \\
& \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& \times (u_m - a_1)^2 (u_m - a_2)^2 \ldots (u_m - \mathrm{K}u_m)^2 \\
& \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& \times (a_n - a_1)^2 (a_n - a_2)^2 \ldots (a_n - a_{n-1})^2,
\end{aligned}
$$

takže bude obsahovati členy *positivní* a *negativní.*

Positivní jsou faktorové, kdež jest

1. reální minuend i subtrahend, na př.

$$(a_3 - a_2)^2;$$

2. reální minuend, soujemný subtrahend, poněvadž tu vždy spojiti možná dva faktory tvaru

$$(a_k - u)(a_k - \mathrm{K}u) = a_k^2 - (u + \mathrm{K}u)\, a_k + u \,.\, \mathrm{K}u,$$

a z arithmetiky čísel soujemných známo, že i součet i součin sdružených čísel soujemných jest reálním;

3. soujemný minuend i subtrahend, vyjmouc případ $(u - \mathrm{K}u)$, poněvadž tu vždy spojiti možná dva faktory tvaru

$$(u - \mathrm{K}v)(v - \mathrm{K}u) = uv + \mathrm{K}uv - (u \,.\, \mathrm{K}u + v \,.\, \mathrm{K}v),$$

jichž součin jest reální.

Negativní jsou vždy pouze faktorové tvaru právě vyjmutého

$$(u - \mathrm{K}u)^2,$$

poněvadž *rozdíl* konjugovaných čísel soujemných jest *imaginární,* *čtverec* jeho tedy *negativní*; a takových faktorů vyskytuje se zde pouze *m.*

Abychom pak mohli na tomto základě sestavovati členy řady (1'), užijme známé poučky, podle níž se vyjadřují subdeterminanty stupně k-tého čtverce determinantu stupně n-tého *součtem* čtverců příslušných subdeterminantů, majíce na zřeteli, že

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \dots, & 1 \\ a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_k \\ a_1^2, & a_2^2, & a_3^2, & \dots, & a_k^2 \\ \vdots & & & & \\ a_1^{k-1}, & a_2^{k-1}, & a_3^{k-1}, & \dots, & a_k^{k-1} \end{vmatrix}^2 .$$

A tu plyne z poučky této *) přímo, že řada (1) obsahuje samé $+$, jakmile jsou kořeny vesměs *realné*; neb součet čtverců čísel reálných jest vždy *positivní.* Poslední pak člen této řady jest podlé vzorce (7) taktéž *positivní.*

Vyskytují-li se však v rovnici (3) i kořeny *soujemné*, objeví se v řadě (1) i členové *negativní*, jelikož součin (8), z jehož faktorů se skládají podlé poučky připomenuté, obsahovati pak bude i činitele *negativní.*

Aby se pak mohlo v jednotlivých případech užiti tohoto kriteria Borchardtova, nutno napřed z koëfficientů rovnice (3) sestaviti si hodnoty **)

$$(9) \qquad s_k = \begin{vmatrix} c_1, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 2c_2, & c_1, & 1, & \dots, & 0 \\ 3c_3, & c_2, & c_1, & \dots, & 0 \\ \vdots & & & & \\ kc_k, & c_{k-1}, & c_{k-2} & \dots, & c_1 \end{vmatrix}$$

a pomocí těchto hodnot pak podle vzorce (2) rozhodující Δ_k, takže přirozeným jest úkol, jak vyjádřiti výrazy Δ_k přímo co

---

*) Viz *Studnička* „Jak vyjádří se subdeterminant k-tého stupně součinu dvou determinantů n-tého stupně pomocí příslušných subdeterminantů jejich.“ Věstník české Akademie věd, duben, 1898.

**) Viz: *Řehořovský* „Základové vyšší algebry“, Praha, 1883. pag. 10.

funkce koëfficientů c_k. A řešení jeho provádí *Netto**) induktivně takto:

Z identičnosti samozřejmé

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & s_0, & s_1, & s_2 \\ 0, & s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_0, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ -c_1, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ c_2, & -c_1, & 1, & 0, & 0 \\ -c_3, & c_2, & -c_1, & 1, & 0 \\ 0, & -c_3, & c_2, & -c_1, & 1 \end{vmatrix}$$

plyne především, znásobíme-li a užijeme-li vzorců Newtonových v tomto zvláštním případě, kde

$$s_0 = 3,$$

takže pak možná psáti

$$s_1 - c_1 s_0 = -2c_1,$$
$$s_2 - c_1 s_1 + c_2 s_0 = -c_2,$$
$$s_3 - c_1 s_2 + c_2 s_1 - c_3 s_0 = 0,$$

výsledek ve tvaru

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1, & -c_1, & c_2, & -c_3, & 0 \\ 0, & 1, & -c_1, & c_2, & -c_3 \\ 0, & 0, & 3, & -2c_1, & c_2 \\ 0, & 3, & -2c_1, & c_2, & 0 \\ 3, & -2c_1, & c_2, & 0, & 0 \end{vmatrix},$$

kdež nutno druhý a čtvrtý sloupec a pak druhý a čtvrtý řádek co do znamení obrátiti, aby se obdržely prvky vesměs positivní; a vyměníme-li poslední řádek za prostřední, zjednáme si konečně

$$\Delta_3 = -\begin{vmatrix} 1, & c, & c_2, & c_3, & 0 \\ 0, & 1, & c_1, & c_2, & c_3 \\ 3, & 2c_1, & c_2, & 0, & 0 \\ 0, & 3, & 2c_1, & c_2, & 0 \\ 0, & 0, & 3, & 2c_1, & c_2 \end{vmatrix},$$

což pak možná zevšeobecniti vzorcem

**) Viz *Netto* „Vorlesungen über Algebra“, I. Bd., Leipzig, 1896. pag. 132.

$$(10)\quad \Delta_n = (-1)^{n_2} \cdot \left|\begin{array}{llllll} 1, & c_1, & c_2, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & c_1, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & c_{n-1}, & c_n \\ n, & (n-1)c_1, & (n-2)c_2, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & n, & (n-1)c_1, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & n, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 2c_{n-2}, & c_{n-1} \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}(n-1)\,ř. \\ \left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}n\ ř. \end{array}$$

Jak patrno, vyžaduje stanovení jakosti kořenů tímto spůsobem řízené vyčíslení determinantu nanejvýš stupně $(2n-1)$-ho, při čemž se z první části determinantu (10), obsahující koëfficienty rovnice (3), do počtu béře $(n-1)$ řádek, z druhé pak části, obsahující součin týchže koëfficientů s příslušnými mocniteli neznámé x, béře řádků n, takže na př. pro rovnici stupně třetího

$$x^3 + px + q = 0$$

nutno sestaviti

$$\Delta_1 = 3,$$

$$\Delta_2 = -\left|\begin{array}{lll} 1, & 0, & p \\ 3, & 0, & p \\ 0, & 3, & 0 \end{array}\right| = -\left|\begin{array}{ll} 3, & 0 \\ 0, & 2p \end{array}\right| = -6p,$$

$$\Delta_3 = -\left|\begin{array}{lllll} 1, & 0, & p, & q, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & p, & q \\ 3, & 0, & p, & 0, & 0 \\ 0, & 3, & 0, & p, & 0 \\ 0, & 0, & 3, & 0, & p \end{array}\right|$$

anebo snížíme-li opět známým spůsobem*) stupeň determinantu, napřed

$$\Delta_3 = \left|\begin{array}{llll} 1, & 0, & p, & q \\ 0, & 2p, & 3q, & 0 \\ 3, & 0, & p, & 0 \\ 0, & 3, & 0, & p \end{array}\right|$$

---

*) Viz: *Studnička* „Über eine neue Determinantentransformation“ Sitzb. d. kön. böhm. Ges. d. Wiss., 1879.

a konečně po jednoduché výměně řádků

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3, & 0, & p \\ 0, & 2p, & 3q \\ 2p, & 3q, & 0 \end{vmatrix} = -4p^3 - 27q^2,$$

což přímo poskytuje i vzorec (2), zavedeme-li tam

$$s_0 = 3,\ s_1 = 0,\ s_2 = -2p,\ s_3 = -3q,\ s_4 = 2p^2.$$

Sestavíme-li podle Borchardta „signa", obdržíme tedy

$$\begin{matrix} \sigma\Delta_1, & \sigma\Delta_2, & \sigma\Delta_3, \\ +, & -, & -, \end{matrix}$$

což podmiňuje *dva* kořeny soujemné, jelikož tu *jedna* znaménková změna se jeví. Kdyby však koëfficient p byl *negativní*, vznikla by řada znamének

$$\begin{matrix} +, & +, & - & \text{pro } 4p^3 < 27q^2, \\ +, & +, & + & \text{pro } 4p^3 > 27q^2, \end{matrix}$$

takže by za první podmínkou následovalo dvé kořenů soujemných, za druhou pak realnost všech. Kdyby konečně ve zvláštním případě

$$\Delta_3 \equiv 4p^3 - 27q^2 = 0,$$

byl by i příslušný součin dle vzorce (7) nullou, což poukazuje ku *stejným* kořenům počtem aspoň 2 a tedy k reálnosti taktéž všech.

Podobný rozbor provésti možná s rovnicí stupně čtvrtého

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Zde obdržíme podobným spůsobem

$$\Delta_1 = 4,$$

$$\Delta_2 = -\begin{vmatrix} 1, & 0, & p \\ 4, & 0, & 2p \\ 0, & 4, & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4, & 0 \\ 0, & 2p \end{vmatrix} = -8p,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & p, & q, & r \\ 0, & 1, & 0, & p, & q \\ 4, & 0, & 2p, & q, & 0 \\ 0, & 4, & 0, & 2p, & q \\ 0, & 0, & 4, & 0, & 2p \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1, & 0, & p, & q \\ 0, & 2p, & 3q, & 4r \\ 4, & 0, & 2p, & q \\ 0, & 4, & 0, & 2p \end{vmatrix},$$

a po dalším stupně snížení a upravení

$$\varDelta_3 = -\begin{vmatrix} 4, & 0, & 2p \\ 0, & 2p, & 3q \\ 2p, & 3q, & 4r \end{vmatrix} = 4(2p^3 - 8pr + 9q^2);$$

konečně podle téhož vzorce (10) napřed

$$\varDelta_4 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & p, & q, & r, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & p, & q, & r, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & p, & q, & r \\ 4, & 0, & 2p, & q, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 4, & 0, & 2p, & q, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 4, & 0, & 2p, & q, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 4, & 0, & 2p, & q \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1, & 0, & p, & q, & r, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & p, & q, & r \\ 0, & 2p, & 3q, & 4r, & 0, & 0 \\ 4, & 0, & 2p, & q, & 0, & 0 \\ 0, & 4, & 0, & 2p, & q, & 0 \\ 0, & 0, & 4, & 0, & 2p, & q \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 0, & p, & q, & r \\ 2p, & 3q, & 4r, & 0, & 0 \\ 0, & 2p, & 3q, & 4r, & 0 \\ 4, & 0, & 2p, & q, & 0 \\ 0, & 4, & 0, & 2p, & q \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3q, & 4r, & pq, & 2pr \\ 2p, & 3q, & 4r, & 0 \\ 0, & 2p, & 3q, & 4r \\ 4, & 0, & 2p, & q \end{vmatrix}$$

anebo po dvojí výměně řádků konečně

$$\varDelta_4 = -\begin{vmatrix} 4, & 0, & 2p, & q \\ 0, & 2p, & 3q, & 4r \\ 2p, & 3q, & 4r, & 0 \\ 3q, & 4r, & pq, & 2pr \end{vmatrix},$$

z čehož vyčíslením vyjde známý diskriminant

$$\varDelta_4 = 144pq^2r - 128p^2r^2 - 4p^3q^2 + 16p^4r + 256r^3 - 27q^4.$$

Jak patrno, jsou tyto determinanty obdobného složení a stupně, takže v určitých případech snadno se stanoví jich „signum“ a rozhodne o počtu soujemných kořenů příslušné rovnice.

Jest-li na př.

$$x^4 + x^2 + 2x + 10 = 0,$$

bude podle předcházejícího

$$p = 1, \quad q = 2, \quad r = 10,$$

a tedy patrně

$$\varDelta_1 = 4,$$

$$\varDelta_2 = -8,$$

$$\varDelta_3 = -\begin{vmatrix} 4, & 0, & 2 \\ 0, & 2, & 6 \\ 2, & 6, & 40 \end{vmatrix} = -168\ ^{*}),$$

$$\varDelta_4 = -\begin{vmatrix} 4, & 0, & 2, & 3 \\ 0, & 2, & 6, & 40 \\ 2, & 6, & 40, & 0 \\ 6, & 40, & 2, & 20 \end{vmatrix} = +,$$

takže podle toho snadno sestavíme řadu

$$\begin{matrix} \sigma\varDelta_1, & \sigma\varDelta_2, & \sigma\varDelta_3, & \sigma\varDelta_4 \\ +, & -, & -, & +, \end{matrix}$$

obsahující dvě znaménkové změny, tedy charakterisující dvě dvojice soujemných kořenů, jež podle známé methody**) určí se pomocí resolventy

$$u^3 + 2u^2 - 39u - 4 = 0,$$

takže bude, položíme-li

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{u}, \qquad b = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}u + \frac{1}{2\sqrt{u}}},$$

$$c = -\frac{1}{2}\sqrt{u}, \qquad d = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{u}{4} - \frac{1}{2\sqrt{u}}},$$

---

*) Totéž obdržíme, počítáme-li podle původních vzorců; budeť tu

$$s_0 = 4, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = -2p, \quad s_3 = 3q, \quad s_4 = 2p^2 - 4r,$$

a tedy podle známého vzorce dříve zde u Řehořovskýho vytčeného

$$\varDelta_3 = -\begin{vmatrix} 4, & 0, & -2p \\ 0, & -2p, & -3q \\ -2p, & -3q, & (2p^2 - 4r) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4, & 0, & 2p \\ 0, & 2p, & 3q \\ 2p, & 3q, & 4r \end{vmatrix} = -168.$$

**) Viz: *Kulik* „Lehrbuch der höheren Arithmetik und Algebra". II. Aufl. pag. 336.

dvojice soujemných kořenů jedna

$$x_1 = a + bi, \qquad x_2 = a \quad bi,$$

a podobně druhá

$$x_3 = c + di, \qquad x_4 = c - di,$$

což pomocí reálního kořene naší resolventy, většího nežli 5, přesněji možná vyčísliti.

Elementární odvození vzorce pro kvadraturu křivek $y = Cx^p$ pro jakékoliv realné p.

Píše

Vilém Jung,

professor státní průmyslové školy v Praze.

1. Pro plochu obrazce, omezeného osou úseček, dvěma pořadnicemi a příslušným obloukem křivky

$$y = Cx^p,$$

platí pro jakékoliv realné p, vyjímaje hodnotu $p = -1$, vzorec

$$\text{(1)} \qquad \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \frac{Cx_2^{p+1} - Cx_1^{p+1}}{p+1} = \frac{x_2 y_2 - x_1 y_1}{p+1}.$$

Pro $p = -1$ platí vzorec

$$\text{(2)} \qquad \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{P}}} = \mathrm{C}\,[lx_2 - lx_1].$$

Tento vzorec se obyčejně dokazuje elementárně umělým způsobem geometrickým pro $p = 2$ (pro parabolu 2. stupně) a pro jakékoliv *celistvé* a *kladné* p (paraboly vyšších stupňů) pomocí vyšších řad arithmetických anebo také zvláštními obraty.

Prof. Dr. Gustav Holzmüller, *) jenž se snaží odvozovati

*) „Mechanische Plaudereien.“ Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1896, Nro 6., 9.
„Die Ingenieur-Mathematik“ in elementarer Behandlung. Teubner-Leipzig 1897.