Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 4, 276--300

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123065

kde souhlásky jsou, *souhlasí* jednotky trojmoci s číslicemi stejnolehlými a na všech ostatních místech *doplňuje* se s jednotkami trojmoci na 10. Jestliže na př. poslední číslice trojmoci $= 3$, jsou jednotky odmocniny 7, jestli 8, jsou jednotky odmocniny 2 a t. d., jak zřejmo z hořejší soustavy čísel.

K objasnění věci stůjtež tu některé třetí odmocniny za příklady.

$\sqrt[3]{6|859} = 19$, $\sqrt[3]{46|656} = 36$, $\sqrt[3]{117|649} = 49$,

$\sqrt[3]{857|375} = 95$, $\sqrt[3]{300|763} = 67$, $\sqrt[3]{373|248} = 72$,

$\sqrt[3]{571|787} = 83$, $\sqrt[3]{753|571} = 91$, $\sqrt[3]{195|112} = 58$,

$\sqrt[3]{912|673} = 97$.*)

Úlohy.

Úloha 1.

Vyhledati čísla, jež se rovnají své čtvrté mocnině.

R.

Řešení. (Zaslal p. *Eduard Brinkmann*, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze).

Nazveme-li hledaná čísla x, bude dle supposice

$$x = x^4.$$

Jeden kořen této rovnice jest

$$x_1 = 0;$$

ostatní zahrnuty rovnicí $1 = x^3$ čili $x^3 - 1 = 0$.

Rozkladem obdržíme

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

---

*) Vypočítávání třetí odmocniny racionalního čísla pěti- nebo šesticiferního viz též *Mach* *„Sbírka příkladů pro počítání z paměti,"* str. 100 a 111. *Red.*

odkudž $$x_2 = 1$$

a dále $$x^2 + x + 1 = 0,$$

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Čísla hledaná jsou tedy

$$0,\ 1,\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Úloha 2.

Řešiti jest rovnici

$$x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + 2x - \sqrt{x} = 6.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *J. Hák,* stud. VII. tř. g. v Hradci Králové).

Rovnici

$$x^2 - 2x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} = 6$$

lze psáti

$$(x^2 - 2x\sqrt{x} + x) + (x - \sqrt{x}) = 6$$

čili

$$(x - \sqrt{x})^2 + (x - \sqrt{x}) - 6 = 0.$$

Řešíme-li, najdeme

$$x - \sqrt{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = 2, -3$$

a) Je-li

$$x - \sqrt{x} = 2,$$

jest

$$\sqrt{x} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1,$$

tudíž

$$x_1 = 4,$$
$$x_2 = (-1)^2.$$

b) Je-li

$$x - \sqrt{x} = -3,$$

jest

$$\sqrt{x} = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2},$$

$$x_{3,4} = \frac{-10 \pm 2i\sqrt{11}}{2} = -5 \pm i\sqrt{11}.$$

Úloha 3.

Řešiti jest rovnici

$$\sqrt[3]{76 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{76 - \sqrt{x}} = 8.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Václav Janďourek,* stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech).

Ztrojmocníme-li danou rovnici, obdržíme po náležitém zjednodušení

$$\sqrt[3]{(76 + \sqrt{x})^2 (76 - \sqrt{x})} + \sqrt[3]{(76 + \sqrt{x})(76 - \sqrt{x})^2} = 120$$

čili

$$\sqrt[3]{76^2 - x} \,.\, \left[\sqrt[3]{76 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{76 - \sqrt{x}}\right] = 120.$$

Výraz uzávorkovaný má však dle rovnice dané hodnotu rovnou 8; proto přechází rovnice poslední ve

$$8\sqrt[3]{76^2 - x} = 120,$$

z níž ustanovíme

$$x = 76^2 - 15^3 = 5776 - 3375 = 2401 = 49^2.$$

Dosazením se přesvědčíme, že tato hodnota dané rovnici irracionalné činí zadost.

Úloha 4.

Řešiti jest rovnici

$$x(1 - lg\,5) = lg\,[(x^2 - 1)(4x^2 - 17x + 4) + 2^x].$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *František Košelka*, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí.)

Ježto levá strana rovnice jest

$$x(1 - lg\,5) = x(lg\,10 - lg\,5) = x\,lg\,2 = lg\,2^x,$$

bude, vynecháme-li symbol lg, daná rovnice

$$2^x = (x^2 - 1)(4x^2 - 17x + 4) + 2^x$$

aneb

$$(x^2 - 1)(4x^2 - 17x + 4) = 0.$$

Odtud ustanovíme

a) $x^2 - 1 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = -1;$

b) $4x^2 - 17x + 4 = 0,$

$$x = \frac{17 \pm 15}{8},\ x_3 = 4,\ x_4 = \frac{1}{4}.$$

Úloha 5.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$\frac{(x-y)^2+1}{(x+y)^2+1} = \frac{a^2}{b^2+1}$$

$$\frac{x^2}{y^2+1} = \frac{(a-b)^2+1}{(a+b)^2+1}.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Otakar Lhotský*, stud. VII. tř. gymn. v Opavě.)

Z prvé rovnice plyne

$$\frac{(x+y)^2+1-[(x-y)^2+1]}{(x+y)^2+1+(x-y)^2+1} = \frac{b^2-a^2+1}{b^2+a^2+1}$$

čili

$$(\alpha)\qquad \frac{2xy}{x^2+y^2+1} = \frac{b^2-a^2+1}{b^2+a^2+1}.$$

Z druhé z rovnic daných vyvodíme

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+1}=\frac{(a-b)^2+1}{(a-b)^2+(a+b)^2+2}$$

čili

$$(\beta)\qquad \frac{2x^2}{x^2+y^2+1}=\frac{(a-b)^2+1}{a^2+b^2+1}.$$

Podílem rovnic (β) a (α) ustanovíme

$$(\gamma)\qquad \frac{x}{y}=\frac{(a-b)^2+1}{b^2-a^2+1};$$

z této a z druhé rovnice dané vyloučíme x, čímž nabudeme

$$\frac{y^2}{y^2+1}=\frac{(b^2-a^2+1)^2}{[(a+b)^2+1]\,[(a-b)^2+1]}.$$

Odtud jde

$$\frac{y^2}{y^2+1-y^2}=\frac{(b^2-a^2+1)^2}{4a^2},$$

tudíž

$$y=\pm\frac{b^2-a^2+1}{a}$$

a dle rovnice (γ)

$$x=\pm\frac{(a-b)^2+1}{2a}.$$

Úloha 6.

Řešiti jest rovnici

$$\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x=\sec x+\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Žížala,* stud. VII. tř. gymn. v Příbrami.)

Píšeme-li rovnici danou

$$\sin x+\cos x+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x},$$

lze jí dáti podobu

$$\sin^2 x\cos x+\cos^2 x\sin x=\cos x+\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x$$

čili

$$\sin x \cos x (\cos x + \sin x) = (\cos x + \sin x)(1 + \cos x - \sin x).$$

Rozpadá se tudíž rovnice daná ve dvě:

a) $\cos x + \sin x = 0,$

b) $\sin x \cos x = 1 + \cos x - \sin x.$

Z rovnice a) plyne

$$\operatorname{tg} x = -1,$$
$$x = 135^0, 315^0, \ldots.$$

Rovnici b) lze psáti

$$(1 + \cos x)(1 - \sin x) = 0,$$

tudíž

α) $1 + \cos x = 0, \cos x = -1, x = 180^0, \ldots$

β) $1 - \sin x = 0, \sin x = 1, x = 90^0, \ldots.$

Úloha 7.

Řešiti jest rovnici

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Nečas,* stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí).

Sloučíce 1. a 3., pak 2. a 4. člen levé strany, přijdeme k rovnici

$$\sin 2x \cos x + \sin 3x \cos x = 0,$$

kterou ještě takto přetvoříme

$$\cos x (\sin 2x + \sin 3x) = 0$$
$$\cos x (2 \sin x \cos x + 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) = 0$$
$$\cos x \sin x (2 \cos x + 3 \cos^2 x - 1 + \cos^2 x) = 0$$
$$\cos x \sin x (4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1) = 0.$$

Rovnice tato rozpadá se pak následovně:

a) $\cos x = 0, x = 90^0, 270^0, \ldots$

b) $\sin x = 0, x = 0, 180^0, 360^0, \ldots$

c) $4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0,$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4},$$
$$x = 72^0,\ 288^0, \ldots,\ 144^0,\ 216^0, \ldots.$$

(Viz: Strnad, Geometrie pro vyšší školy realné, str. 139.)

Jiné řešení. (Zaslal p. *Jan Komárek*, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze).

Rovnici danou lze též takto psáti

$$2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$$

čili

$$\sin \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0,$$

a dále rozložiti ve

$$\sin \frac{5x}{2} \,.\, \cos x \,.\, \cos \frac{x}{2} = 0.$$

Tato rovnice rozpadá se

a) $\sin \frac{5x}{2} = 0,\quad \frac{5x}{2} = 0,\ 180^0,\ 360^0, \ldots$

$x = 0,\ 72^0,\ 144^0, \ldots$

b) $\cos x = 0,\quad x = 90^0,\ 270^0, \ldots$

c) $\cos \frac{x}{2} = 0,\quad x = 0,\ 180^0,\ 360^0, \ldots.$

Úloha 8.

Řešiti jest rovnici

$$4 \sin^3 x - 3 \sin x - \cos x = 0.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *R. Milota*, stud. VIII. tř. g. v Písku).

Jelikož

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

lze rovnici danou psáti

$$\sin 3x = - \cos x$$

čili

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[(2n+1)\pi \pm x\right].$$

Odtud plyne

$$3x \mp x = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

a konečně

$$x_1 = \frac{(4m+3)\pi}{4},$$

$$x_2 = \frac{(4m+3)\pi}{8}.$$

Úloha 9.

Dokázati, že

$$\frac{1}{2}\,cosec\,10^0 - 2\sin 70^0 = 1.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Tille*, stud. VIII. tř. g. v Křemencové ul. v Praze).

Transformujme levou stranu dané rovnice takto:

$$\frac{1}{2}\operatorname{cosec} 10^0 - 2\sin 70^0 = \frac{1}{2\sin 10^0} - 2\sin 70^0$$

$$= \frac{1 - 4\sin 10^0 \sin 70^0}{2\sin 10^0};$$

jelikož

$$-2\sin 10^0 \sin 70^0 = \cos 80^0 - \cos 60^0,$$

rovná se poslední zlomek výrazu

$$\frac{1 + 2\cos 80^0 - 2\cos 60^0}{2\sin 10^0} = \frac{\cos 80^0}{\sin 10^0} = 1,$$

což bylo dokázati.

Úloha 10.

Vyloučiti jest x ze soustavy rovnic

$$\sec x + (1 + \operatorname{cosec}^2 x)\sec x\, tg^2 x = m$$
$$tg\, x - (1 + \operatorname{cosec}^2 x)\, tg^3 x = n.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Václav Špaček*, stud. VIII. tř. gymn. v Příbrami).

Z prvé rovnice plyne

$$\sec x + (2 + \operatorname{ctg}^2 x) \operatorname{tg}^2 x \sec x = m$$

čili

$$2 \sec x + 2 \operatorname{tg}^2 x \sec x = m,$$

$$2 \sec x (1 + \operatorname{tg}^2 x) = m$$

$$(1) \qquad 2 \sec^3 x = m.$$

Z druhé rovnice jde

$$\operatorname{tg} x - (2 + \operatorname{ctg}^2 x) \operatorname{tg}^3 x = n$$

čili

$$2 \operatorname{tg}^3 x = -n.$$

Jest tedy

$$\sec x = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \operatorname{tg} x = -\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

a jelikož

$$\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1,$$

shledáváme

$$\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

neboli

$$m^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}.$$

Úloha 11.

Úhlopříčky trojúhelníka ABCD protínají se v bodě O; prodloužíme AC do E a BD do F tak, aby bylo OE = AC, OF = BD. Jest dokázati planimetricky, že čtyrúhelník ABCD rovná se trojúhelníku OEF. *R.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Hýbner*, stud. VII. tř. gymn. v Litomyšli).

Veďme spojnici $\overline{DE}$, bodem C rovnoběžku

$$CL \parallel BD,$$

a spusťme kolmice

$$AM \perp CL, \quad EN \perp BD.$$

Jest pak

$$\triangle AMC \cong \triangle ENO,$$

tedy

$$\overline{AM} = \overline{EN}.$$

Dále však jest

$$\triangle DCE = \triangle DAO,$$

jelikož mají stejné základny i stejné výšky; z týchž příčin jest

$$\triangle DEF = \triangle BOE = \triangle ABC,$$

pročež

$$\triangle DOC + \triangle DCE + \triangle DEF = \triangle DOC + \triangle DAO + \triangle ABC,$$

t. j.

$$\triangle OEF = ABCD,$$

jak bylo dokázati.

Úloha 12.

Do kružnice vepsati pětiúhelník, jehož úhly jsou dány.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *V. Kloubek*, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze).

Budiž *abcde* žádaný pětiúhelník vepsaný v kružnici středu o; označme úhly

$$bae = \alpha, \quad abc = \beta, \quad bcd = \gamma, \quad cde = \delta, \quad dea = \varepsilon,$$
$$cod = \alpha_1, \quad doe = \beta_1, \quad eoa = \gamma_1, \quad aob = \delta_1, \quad boc = \varepsilon_1.$$

O úhlech těch v platnosti jsou rovnice

$$\begin{array}{ll}
(1) & \varepsilon_1 + \alpha_1 + \beta_1 = 2\alpha \\
(2) & \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 2\beta \\
(3) & \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 2\gamma \\
(4) & \gamma_1 + \delta_1 + \varepsilon_1 = 2\delta \\
(5) & \delta_1 + \varepsilon_1 + \alpha_1 = 2\varepsilon,
\end{array}$$

založené na známé vlastnosti úhlů středových a obvodových.

Z rovnic těchto známými způsoby vypočítáme veličiny $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \varepsilon_1$.

Vyloučíme-li na př. poslední tři, dospějeme k rovnicím

$$2\alpha_1 + \beta_1 = 2\beta - 2\delta + 2\varepsilon$$
$$\alpha_1 + 2\beta_1 = 2\alpha + 2\gamma - 2\delta\,,$$

z nichž vypočítáme

$$3\alpha_1 = 4\beta - 2\alpha + 4\varepsilon - 2\gamma - 2\delta$$
$$= 4(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) - 6(\alpha + \gamma + \delta)\,.$$

Jelikož $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 6R$,

jest $3\alpha_1 = 24R - 6[6R - (\beta + \varepsilon)]$,

tudíž $\alpha_1 = 2(\beta + \varepsilon) - 4R$.

Obdobně jest

$$\beta_1 = 2(\gamma + \alpha) - 4R\,,$$
$$\gamma_1 = 2(\delta + \beta) - 4R \quad \text{atd.}$$

Znajíce úhly pětiúhelníka, dovedeme dle rovnic posledních sestrojiti úhly středové, příslušné k jeho stranám a tím pětiúhelník do kružnice vepsati.

Jiné řešení. (Zaslal p. Jan *Štěpán*, stud. VIII. tř. gymn. v Kroměříži).

Sestrojíme-li středový úhel 2α, obdržíme poloměry *ob*, *oe*; úhlem středovým 2γ nalezneme k *ob* druhé rameno *od* atd.

Úloha 13.

Úhly pětiúhelníka do kružnice vepsaného jsou α, β, γ, δ, ε. Jest vypočítati úhly pětiúhelníka omezeného úhlopříčkami daného.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *J. Kapras*, stud. VIII. tř. g. v Brně).

Úhlopříčky *bd*, *ce* pětiúhelníka *abcde* protínejtež se v bodě a', úhlopříčky *ad*, *ce* v bodě b' atd. Úhly pětiúhelníka $a'b'c'd'e'$, omezeného úhlopříčkami, označme po řadě α', β', γ', δ', ε'. Užijeme-li mimo to označení z úlohy 12., jest

$$\sphericalangle\, dce = \frac{\beta_1}{2}\,, \qquad \sphericalangle\, bdc = \frac{\varepsilon_1}{2}\,,$$

tudíž

$$\alpha' = 2R - \frac{\beta_1 + \varepsilon_1}{2}.$$

Dosadíme-li za β_1 a ε_1 hodnoty vyvozené v úloze předešlé, obdržíme

$$\begin{aligned}\alpha' &= 2R - (2\alpha + \gamma + \delta - 4R) \\ &= 6R - [\alpha + 6R - (\beta + \varepsilon)]\end{aligned}$$

čili

$$\alpha' = \beta + \varepsilon - \alpha.$$

Obdobně vyjadříme ostatní úhly vnitřního pětiúhelníka.

Úloha 14.

Do kružnice vepsán šestiúhelník abcdef; vrcholy jeho dělí kružnici v oblouky

$$\begin{aligned}\widehat{ab} &= \alpha, \ \widehat{bc} = \alpha', \\ \widehat{cd} &= \beta, \ \widehat{de} = \beta', \\ \widehat{ef} &= \gamma, \ \widehat{fa} = \gamma'.\end{aligned}$$

Kterou relací vázány jsou tyto oblouky, protínají-li se spojnice ad, be, cf v jediném bodě? Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *B. Bydžovský*, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze).

Spojme body a, c, e v trojúhelník; strany jeho protínají spojnice ad, be, cf v bodech d_1, b_1, f_1, o kterých dle věty Cevovy známo, že

$$ab_1 \,.\, cd_1 \,.\, ef_1 = b_1c \,.\, d_1e \,.\, f_1a.$$

Jest však

$$\frac{ab_1}{b_1c} = \frac{ae \,.\, \sin\frac{\alpha}{2}}{ce \,.\, \sin\frac{\alpha'}{2}},$$

$$\frac{cd_1}{d_1e} = \frac{ca \,.\, \sin\frac{\beta}{2}}{ae \,.\, \sin\frac{\beta'}{2}},$$

$$\frac{ef_1}{f_1a} = \frac{ce \,.\, \sin\frac{\gamma}{2}}{ca \,.\, \sin\frac{\gamma'}{2}},$$

proto žádaný vztah jest

$$\sin\frac{\alpha}{2} \,.\, \sin\frac{\beta}{2} \,.\, \sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha'}{2} \,.\, \sin\frac{\beta'}{2} \,.\, \sin\frac{\gamma'}{2}\,.$$

Jiné řešení. Protínají-li se spojnice ad, be, cf v bodě o, a klademe-li

$$\overline{oa} = m\,,\quad \overline{od} = m_1\,,$$
$$\overline{ob} = n\,,\quad \overline{oe} = n_1\,,$$
$$\overline{oc} = p\,,\quad \overline{of} = p_1\,,$$

jest

$$\frac{ab}{de} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta'}{2}} = \frac{m}{n_1}\,,\qquad \frac{cd}{af} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma'}{2}} = \frac{p}{m}\,,$$

$$\frac{ef}{bc} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha'}{2}} = \frac{p}{n_1}\,,$$

pročež

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2} \,.\, \sin\frac{\beta}{2} \,.\, \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha'}{2} \,.\, \sin\frac{\beta'}{2} \,.\, \sin\frac{\gamma'}{2}} = 1\,.$$

Úloha 15.

Jsou-li m_1, m_2, m_3, m_4 mocnosti vrcholů trojúhelníka a průsečíku jeho výšek vzhledem ke kružnici devíti bodů, jest dokázati, že

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} = 0.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Vojtěch*, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti).

Výšky trojúhelníka abc, jehož obsah označme Δ, strany a, b, c, úhly α, β, γ, protínají se v bodě v. Kružnice K devíti bodů jde patami výšek, středy stran a půlí vzdálenosti bodu v od vrcholů trojúhelníka. Jest pak, seče-li kružnice K stranu $\overline{ab}$ v bodech d, e,

$$m_1 = \overline{ad} \, . \, \overline{ae} = \frac{1}{2} \overline{bc} \cos \alpha = \Delta \operatorname{cotg} \alpha \, ,$$

a obdobně

$$m_2 = \Delta \operatorname{cotg} \beta \, , \qquad m_3 = \Delta \operatorname{cotg} \gamma \, .$$

Tudíž

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{\Delta} \, .$$

Mocnost bodu v jest

$$m_4 = -\frac{1}{2} \overline{vc} \, . \, \overline{vd} = -\frac{1}{2} \, . \, \frac{a \cos \gamma}{\sin \alpha} \, . \, \frac{b \cos \alpha \cos \beta}{\sin \beta}$$

$$= -\Delta \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \gamma \, ,$$

pročež

$$\frac{1}{m_4} = - \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{\Delta} \, .$$

Jest však známo, že o úhlech trojúhelníka platí relace

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \, ;$$

proto

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} = 0 \, .$$

Úloha 16.

Vypočítati úhel α trojúhelníka pravoúhlého, je-li odvěsna b střední arithmetickou úměrnou mezi druhou odvěsnou b a přeponou c.

R.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Pokorný*, stud. VII. tř. gymn. v Brně).

Dle supposice jest

$$c = 2b - a\,,$$

pak

$$c^2 = a^2 + b^2\,;$$

vznikající z toho rovnice

$$(2b - a)^2 = a^2 + b^2$$

redukuje se na

$$4a = 3b\,,$$

pročež

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}\,.$$

Úloha 17.

Jest dokázati, že trojúhelník jest pravoúhlý, platí-li o něm relace

$$a)\quad \frac{c-a}{c+a} = tg^2\frac{\beta}{2}\,,$$

$$b)\quad ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{s-b}\,,$$

ve kterých značí s polovici obvodu.

R.

Řešení. (Zaslal p. *František Truhlář,* stud. VII. tř. g. v Brně).

a) Daný vztah lze psáti

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}\,,$$

z čehož

$$\frac{c+a-(c-a)}{c+a+c-a} = \frac{\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}}$$

čili

$$\frac{a}{c} = \cos\beta\,;$$

jest tedy trojúhelník pravoúhlý, c jeho přeponou.

b) Vyjádříme-li $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ dle známého vzorce, jest

$$\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}=\frac{s}{s-b};$$

zmocníme-li a krátíme, nabudeme

$$\frac{s-a}{s-c}=\frac{s}{s-b},$$

z čehož

$$\frac{s-a+s-c}{s-a-(s-c)}=\frac{s+s-b}{s-(s-b)}$$

čili

$$\frac{2s-(a+c)}{c-a}=\frac{2s-b}{b}.$$

Jelikož $2s=a+b+c$, přechází tato úměra v jednodušší

$$\frac{b}{c-a}=\frac{c+a}{b},$$

z níž jde $\qquad b^2=c^2-a^2, \quad c^2=a^2+b^2,$

čímž zjištěn trojúhelník pravoúhlý.

Úloha 18.

Dokázati, že o trojúhelníku pravoúhlém jest v platnosti relace

$$\sec 2\alpha-\operatorname{tg} 2\beta=\frac{b+a}{b-a}.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Dominik Trnka*, stud. VIII. tř. gymn. ve Vys. Mýtě).

Ježto

$$\sec 2\alpha-\operatorname{tg} 2\beta=\frac{1}{\cos 2\alpha}-\operatorname{tg} 2(90^0-\alpha)$$

$$=\frac{1}{\cos 2\alpha}-\operatorname{tg}(180^0-2\alpha)=\frac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{tg} 2\alpha$$

$$=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}.$$

Dělíme-li čítatele i jmenovatele $\cos^2\alpha$, obdržíme dále

$$\frac{(\operatorname{tg}\alpha+1)^2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Jelikož $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, rovná se výraz poslední

$$\frac{\left(\frac{a}{b}+1\right)^2}{1-\frac{a^2}{b^2}} = \frac{(a+b)^2}{b^2-a^2} = \frac{b+a}{b-a} \qquad c.b.d.$$

Úloha 19.

Vyšetřiti, kdy o stranách a úhlech trojúhelníka platnou jest relace

$$a \cos\alpha + b \cos\beta = c \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Polák*, stud. VII. tř. gymn. v Přerově).

Dělíme-li obě strany rovnice činitelem c a nahradíme-li poměr stran poměrem sinusů protějších úhlů, obdržíme

$$\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta = \sin\gamma\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2\sin(\alpha+\beta)\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

odtud pak

$$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

čili

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Rovnice tato jest platnou jen při $\alpha=\beta$, tudíž při trojúhelníku rovnoramenném. Pro trojúhelník libovolný jest, jak z úvahy vysvítá,

$$a\cos\alpha + b\cos\beta = c\cos(\alpha-\beta).$$

Úloha 20.

Ve čtyřúhelníku jsou strany $BC = CD = DA$ sobě rovny; jsou-li $ABCD$ úhly při AB označeny α, β a svírají-li prodloužené strany AB, CD úhel γ, jest dokázati, že

$$\sin\alpha = \sin\beta + \sin\gamma.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Václ. Vaněček*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze).

Prodloužené strany AB, CD protínejtež se v bodě E. Je-li

$$BC = CD = DA = m\,,\qquad CE = x\,,$$

jest z trojúhelníka BCE zřejma úměra

$$x : m = \sin\beta : \sin\gamma$$

čili
$$(x + m) : m = (\sin\beta + \sin\gamma) : \sin\gamma\,.$$

Z trojúhelníka AED plyne však

$$(x + m) : m = \sin\alpha : \sin\gamma\,,$$

pročež
$$\sin\alpha = \sin\beta + \sin\gamma\,.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Karel Nečas*, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí).

Veďme kolmice

$$DF \perp AB\,,\qquad CG \perp AB\,,\qquad CH \perp DF\,,$$

jimiž vzniknou pravoúhlé trojúhelníky

$$ADF\,,\quad BCG\,,\quad CDH\,.$$

Jest pak

$$DF = HF + DH = CG + DH$$

aneb
$$m\sin\alpha = m\sin\beta + m\sin\gamma\,,$$

t. j.
$$\sin\alpha = \sin\beta + \sin\gamma.$$

Úloha 21.

V trojúhelníku abc vedena výška $cd \perp ab$, a do trojúhelníků acd, bcd vepsány kružnice poloměrů ϱ_1, ϱ_2. a) Sestrojiti *trojúhelník abc, dáno-li ϱ_1, ϱ_2 a úhel $acb = \gamma$. b) Řešiti trigonometricky trojúhelník z týchž prvků daných.*

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Vojtěch*, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti).

a) Sestrojení. Jsou-li úhly žádaného trojúhelníka $\sphericalangle\, bac = \alpha$, $\sphericalangle\, abc = \beta$, $\sphericalangle\, acb = \gamma$, jest $\sphericalangle\, o_1co_2 = \frac{\gamma}{2}$, značí-li o_1, o_2 středy kružnic vepsaných do trojúhelníků *acd*, *bcd*. Vztyčme tedy k libovolné přímce M v bodě *d* kolmici N; sestrojme kružnici K_1 poloměru ϱ_1, dotýkající se obou ramen M, N, podobně kružnici K_2 poloměru ϱ_2. Tím nabudeme bodů o_1, o_2. Na tětivě o_1o_2 sestrojme kružnici K, obsahující úhel obvodový $\frac{\gamma}{2}$; průsečík její s N jest vrchol *c*. Tečny vedené tímto bodem ke kružnicím K_1, K_2 stanoví v M vrcholy *a*, *b*.

b) Výpočet. Označme výšku $\overline{cd} = v$; pak jest

$$\frac{\varrho_1}{v - \varrho_1} = \operatorname{tg} \frac{R - \alpha}{2},$$

$$\frac{\varrho_2}{v - \varrho_2} = \operatorname{tg} \frac{R - \beta}{2}.$$

Jelikož

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{R - \alpha}{2} + \frac{R - \beta}{2},$$

jest

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\dfrac{\varrho_1}{v - \varrho_1} + \dfrac{\varrho_2}{v - \varrho_2}}{1 - \dfrac{\varrho_1\varrho_2}{(v - \varrho_1)(v - \varrho_2)}}$$

čili

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{v(\varrho_1 + \varrho_2) - 2\varrho_1\varrho_2}{v^2 - v(\varrho_1 + \varrho_2)}.$$

Tím dospíváme k rovnici kvadratické

$$v^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - v(\varrho_1 + \varrho_2)\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) + 2\varrho_1\varrho_2 = 0,$$

ze které lze v ustanoviti. Znajíce v, ustanovíme dle rovnic hořejších α, β, načež

$$b = v \sin\alpha\,, \quad a = v \sin\beta\,,$$
$$c = v(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)\,.$$

Úloha je dvojznačná, jakož kružnice K_1, K_2 mohou ležeti buď na stejné straně neb na různých stranách výšky.

Úloha 22.

Krychli o hraně a otupeny rohy koulí, která se dotýká všech hran krychle. Ustanoviti povrch a obsah tělesa takto vzniklého.

Týž.

Řešení. (Zaslal p. *Ant. Burda,* stud. VIII. tř. gymn. v Třebíči).

Poloměr koule jest

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2}\,,$$

povrch její

$$\Pi = 4\pi r^2 = 2\pi a^2$$

a obsah

$$K = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{3} a^3\sqrt{2}\,.$$

Stěnami krychle odťaty jsou od koule úseče kulové — počtem 6 — jichž hrana má poloměr

$$\varrho = \frac{a}{2}$$

a jichž výška

$$v = r - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)\,.$$

Jest tedy povrch daného tělesa

$$P = 4\pi r^2 - 6\,.\,2\pi r v + 6\pi\varrho^2$$
$$= 2\pi a^2 - 3\pi a^2(\sqrt{2} - 1) + \frac{3}{2}\pi a^2$$

čili
$$P = \frac{\pi a^2}{2}(13 - 6\sqrt{2}).$$

Obsah tělesa jest pak

$$T = \frac{4}{3}\pi r^3 - 6.\left[\frac{\pi \varrho^2 v}{2} + \frac{\pi v^3}{6}\right]$$
$$= \frac{\pi}{3}a^3\sqrt{2} - \frac{3}{8}\pi a^3(\sqrt{2} - 1) - \pi\frac{a^3}{8}(\sqrt{2} - 1)^3$$

aneb po náležitém upravení

$$T = \frac{\pi a^3}{12}(15 - 8\sqrt{2}).$$

Úloha 23.

Kolmý kruhový válec protať rovinou v ellipse, jejíž číselná výstřednost jest ε. Který úhel tvoří rovina tato se základnou?

Týž.

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Koláček*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře).

Je-li r poloměr základny válcové, α úhel roviny sečné se základnou, jsou poloosy elliptického řezu

$$a = \frac{r}{\cos\alpha}, \quad b = r,$$

tedy výstřednost lineárná

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = r \operatorname{tg} \alpha$$

a výstřednost numerická

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \operatorname{tg}\alpha \,.\, \cos\alpha;$$

pročež

$$\sin\alpha = \varepsilon.$$

Správná řešení úloh zaslali pp.:

Bartoš Rudolf, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 4., 6. až 11., 16. až 19.
Brinkmann Emerich, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 4., 7. až 11., 14., 17. až 20., 22.
Burda Antonín, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 8., 11., 12., 16. až 20., 22., 23.
Bydžovský Boh., stud. VIII. tř. akad. g. v Praze, úl. 1. až 20.
Engliš Karel, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 4., 6. až 12.
Gardovský Ladislav, stud. VIII. tř. g. v Plzni, úl. 1. až 14., 16. až 20., 22., 23.
Goláň Josef, stud. g. ve Val. Meziříčí, 1. až 4., 6., 7., 9., 11., 12., 16. až 19., 22.
Grössl Otakar, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1., 3., 4., 6., 7., 16. až 20.
Hák J., stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1. až 4., 7., 11., 12., 13., 16., 17., 18., 20., 22.
Hamrle Bohumil, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 3. až 7., 23.
Hrubý Frnntišek, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 4.
Hýbner Karel, stud. VII. tř. g. v Litomyšli, úl. 1. až 11., 16., 17., 18.
Janďourek Václav, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1., 3., 7., 11., 17., 18.
Jiruška František, stud. VI. r. v Pardubicích, úl. 1., 2., 3., 4., 8., 11., 17.
Kačer František, stud. VII. tř. g. v Budějovicích, úl. 2., 3., 4., 6., 10., 16., 17., 18., 21., 23.
Kapras Jan, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 23.
Klobouček Bohumil, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 2.
Kloubek Vilém, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze, úl. 1. až 20.
Koláček Adolf, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1. až 11., 16., 17., 22., 23.
Komárek Jan, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 4., 6. až 9.
Košelka František, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 13., 16. až 23.

Krmela Josef, bohoslovec v Olomouci, úl. 4., 7., 20.
Kropáč Jan, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 3., 22.
Křižan František, bohoslovec v Olomouci, úl. 7., 9., 18., 22.
Lang Jan, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 4., 6. až 9., 11., 12., 16., 17., 18., 20., 22.
Lhotský Otakar, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 10.
Linhart Stanislav, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 4., 11.
Liška František, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 2., 3., 13.
Macků Bedřich, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 3., 6., 7., 9., 12., 13., 16, 19., 22., 23.
Milota Rudolf, stud. VIII. tř. g. v Písku, úl. 1. až 23.
Moos Jindřich, stud. VI. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 2., 3., 4., 6. až 9.
Mucha Josef, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 23.
Nečas Karel, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 23.
Nepustil František, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 15.
Novák Bedřich, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1., 3., 4., 6., 7., 11., 16., 18.
Novák Václav, stud. VII. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 1. až 4., 6., 7., 8., 11., 16., 18., 20., 22.
Petřvalský Ladislav, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4. 16., 17.
Pokorný František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 6. až 9., 11., 12., 13., 16., 18., 20.
Polák Jaroslav, stud. VII. tř. g. v Přerově, úl. 1. až 9., 11., 12., 16. až 22.
Politzer Rudolf, stud. VIII. tř. g. v Litomyšli, úl. 1., 3., 6., 10., 11., 16.
Pospíšil Jan, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 11., 22.
Procházka Josef, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 1., 3., 22., 23.
Prokeš Karel, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 9., 10., 22.
Přikryl Václav, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 1. až 4., 6. až 9., 11., 12., 16., 17., 18., 22., 23.
Rejzek Antonín, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 1. až 4., 6. až 9., 11., 12., 13.. 16. až 20., 22.

Schoenbaum Emil, stud. V. tř. g. v Benešově, úl. 1., 2., 3., 11., 16., 17., 18.
Siegel František, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 3., 6., 7., 16.
Sigmund Rudolf, v Olomouci, úl. 1. až 13., 16. až 20., 22., 23.
Smetánka Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 10., 16. až 20.
Souček Josef, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 3., 22.
Stross Pavel, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 1. až 4., 6., 10., 16., 17., 20., 23.
Surka Augustin, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 9., 16.
Ševčík Richard, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 4., 7., 13., 16., 17., 18., 23.
Šiman Karel, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 1. až 5., 11., 12., 13., 22., 23.
Šmok Mikuláš, stud. VI. tř. g. v Hradci Králové, úl. 3., 11., 12., 22.
Šob Ferdinand, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 9., 11., 16. až 19., 21., 22.
Špaček Václav, stud. VIII. tř. g. v Příbrami, úl. 1. až 23.
Štěpán Jan, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1. až 9., 12., 16., 18., 19., 20., 23.
Švamberk Gustav, stud. VII. tř. g. v Příbrami, úl. 1. až 4., 6. až 12., 16., 17., 18.
Tereba František, stud. VIII. tř. g. v Křemencové ulici v Praze, úl. 1. až 4., 7., 9., 10., 11., 17., 18., 23.
Tille Josef, stud. VIII. tř. g. v Křemencové ulici v Praze, úl. 1. až 4., 6. až 11., 16., 17., 18., 20., 22., 23.
Trnka Dominik, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 1., 3., 12., 16., 18., 22., 23.
Truhlář František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 6. až 13., 16. až 20.
Tuhý Josef, stud. VII. tř. g. v Kolíně, úl. 1., 3., 4., 9., 11., 16., 22.
Tůma Gabriel, stud. VII. tř. g. v Budějovicích, úl. 1. až 4., 6. až 9., 11., 12., 13., 16., 17., 18., 23.
Valach František, stud. V. tř. g. v Kroměříži, úl. 3.
Válka František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 13.

Vaněček Václav, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 23.
Vaněk Ferdinand, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 4., 7.
Velísek František, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 1. až 4., 6., 7., 9. až 23.
Velísek Ignát, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 1., 3., 4., 6., 9., 16., 17., 22.
Vitěka Antonín, stud. VII. tř. g. v Budějovicích, úl. 4., 9., 22.
Vodička Rudolf, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 1., 2., 3., 6., 11., 17., 19.
Vojtěch Jan, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 1. až 23.
Vojtěchovský Josef, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze, úl. 1. až 13., 16. až 19.
Vondráček Rudolf, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1. až 4., 6. až 13., 17., 18., 20.
Zavřel Jan, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 4., 11., 12., 16., 20.
Záviška František, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 23.
Žížala Jan. stud. VII. tř. g. v Příbrami, úl. 1. až 4., 6., 7., 10., 11., 12., 16., 17., 18.