Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karol Borsuk

Wielościany i quasi-wielościany a topologia ogólna

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 2, 25--31

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123059`

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 74 (1949)

IV.

Plenární přednášky.

WIELOŚCIANY I QUASI-WIELOŚCIANY A TOPOLOGIA OGÓLNA.

KAROL BORSUK, Warszawa.

W topologii współczesnej wyróżnić można dwie podstawowe idee: Jedną jest wprowadzona przez CANTORA, a rozwinięta przez FRÉCHETA i HAUSDORFFA idea przestrzeni abstrakcyjnej jako zbioru punktów, w którym w ten lub inny sposób wprowadza się pojęcie granicy, oraz inne pojęcia topologii ogólnej takie jak zwartość, ośrodkowość, spójność, wymiar itd. Pozwalają one na wyodrębnienie wśród ogółu przestrzeni abstrakcyjnych pewnych klas bardziej specjalnych i w ten sposób na zbliżenie się do konkretnych typów przestrzeni występujących w innych działach matematyki.

W ten sposób URYSOHN scharakteryzował klasę wszystkich podzbiorów przestrzeni HILBERTA (przez ośrodkowość i normalność) a MENGER i NÖBELING — klasę wszystkich podzbiorów przestrzeni euklidesowych. Jasne jest, że im bardziej klasa jest specjalna, tym naogół trudniej jest ją scharakteryzować. To też tylko w nielicznych przypadkach udało się uzyskać pełną topologiczna charakteryzację poszczególnych typów przestrzeni. Wymienić tu należy scharakteryzowanie odcinka, okręgu koła, powierzchni kuli. Już jednak topologiczne scharakteryzowanie kuli trójwymiarowej należy do zagadnień niezmiernie trudnych — jeżeli nie beznadziejnych.

Druga podstawowa idea topologii wywodzi się od POINCARÉGO. Polega ona na przyporządkowaniu przestrzeniom pewnych konstrukcji algebraicznych (zazwyczaj grup) będących niezmiennikami topologicznymi tych przestrzeni, i na sprowadzaniu w ten sposób badań topologicznych do badań algebraicznych.

W przeciwieństwie do mnogościowych pojęć topologii ogólnej, punktem wyjścia są przestrzenie bardzo specjalne, mianowicie wielościany, a dopiero później drogą dość skomplikowanych aproksymacji, przechodzi się do przestrzeni bardziej ogólnych. Dzięki pracom BROUWERA, ALEXANDROWA, ČECHA i innych, trudności, które przy tym występują, zostały pokonane i pojęcia, i metody kombinatoryczne zostały przeniesione z wielościanów na obszerne klasy przestrzeni abstrakcyjnych. W związku z tym mówi się o algebraizacji topologii ogólnej.

Natomiast znacznie trudniejsze okazało się na gruncie mnogościowym przejście od strony przestrzeni abstrakcyjnych do wielościanów, a więc włączenie wielościanów w zakres pojęć topologii ogólnej przez podanie warunków topologicznych, które by wielościany charakteryzowały.

Pojęcie wielościanu należy do geometrii elementarnej. Wielościan jest to suma skończonej liczby sympleksów, gdzie k-wymiarowy sympleks jest to najmniejszy podzbiór wypukły przestrzeni euklidesowej zawierający dany układ $k+1$ punktów liniowo niezależnych. Przechodząc od geometrii elementarnej do topologii, musimy klasę wielościanów rozszerzyć, zaliczając do niej homeomorficzne obrazy wielościanów, czyli t. zw. wielościany krzywoliniowe. Wielościany krzywoliniowe są tymi figurami, z którymi przede wszystkim stykamy się w innych działach geometrii.

Godne jest uwagi, że mówiąc o geometrycznej postaci przedmiotów materialnych, mamy na myśli zawsze wielościany krzywoliniowe. Mówimy więc o przedmiotach kształtu trójkąta, kuli lub torusa, ale nigdy nie przypisujemy przedmiotowi materialnemu kształtu nierozkładalnego continuum lub też nie mówimy, że ma on postać zbioru G_σ nie będącego zbiorem F_σ. Z punktu widzenia ontologicznego można by wogóle kwestionować byt figur, które nie są wielościanami, bo tylko wielościany (krzywoliniowe) mogą być realizowane w postaci materialnych modeli.

Również z punktu widzenia czysto topologicznego wielościany zasługują na specjalną uwagę, ze względu na prawidłowość swej topologicznej budowy. Niestety nie potrafimy podać własności topologicznych (prócz warunków tautologicznych), które by wielościany charakteryzowały. Co więcej, w obecnym stanie nauki trudno oczekiwać, by warunki takie udało się znaleźć.

Dlatego też wydaje się potrzebne wyodrębnienie, na gruncie pojęć topologii ogólnej, klasy przestrzeni, obszerniejszej od wielościanów, lecz na tyle wąskiej, by po za nią znalazły się wszystkie figury o własnościach topologicznych zbyt odbiegających od własności wielościanów. Inaczej mówiąc, wobec niemożności topologicznego scharakteryzowania wielościanów, pożądanym jest wyodrębnienie jakiejś ogólniejszej klasy przestrzeni o własnościach zbliżonych, klasy, którą można by nazwać klasą quasi-wielościanów.

Dążenie do wyodrębnienia takiej klasy nie jest nowe. W szczególności występuje ono u S. LEFSCHETZA[1]), który wprowadza pojęcie quasi-kompleksów, rozumiejąc przez to pewną klasę przestrzeni zwartych, zachowującą się z punktu widzenia teorii przekształceń ciągłych na podzbiory podobnie do wielościanów. Nie będę tu podawać definicji LEFSCHETZA, dla naszych celów jest ona bowiem stanowczo zbyt obszerna.

Zaznaczę jedynie, że definicja LEFSCHETZA obejmuje w szczególności wszystkie przestrzenie zwarte o wymiarze skończonym, lokalnie ściągalne. Nad tymi ostatniemi przestrzeniami chciał bym się nieco zatrzymać, ponieważ z pośród klas przestrzeni wyodrębnionych na gruncie topologii ogólnej i obejmujących wielościany, przestrzenie zwarte, lokalnie ściągalne, o wymiarze skończonym są tymi, dla których stosunkowo najwięcej z pośród zasadniczych własności topologicznych pokrywa się z własnościami wielościanów.[2]) Mówimy, że przestrzeń M jest lokalnie ściągalna w punkcie $p \in M$, jeżeli dla każdego otoczenia U punktu p istnieje otoczenie V punktu p, które drogą ciągłej deformacji w zbiorze U daje się ściągnąć do jednego punktu. Dla przestrzeni zwartych, lokalnie ściągalnych o wymiarze skończonym mamy:

1. Grupy Bettiego wszystkich wymiarów mają skończone układy tworzących, a prawie wszystkie redukują się do zera.
2. Grupa podstawowa ma zawsze skończony układ tworzących.
3. Homologiczna teoria punktów stałych jest taka jak dla wielościanów.

Warto też zaznaczyć, że przestrzenie te stanowią naturalną dziedzinę dla nowoczesnej teorii homotopii, opartej na pojęciu grup homotopii HUREWICZA.

Teoria przestrzeni zwartych, lokalnie ściągalnych jest dość obszernie opracowana. W wydanej w roku 1942 książce S. LEFSCHETZA p. t. *Topics in Topology*,[3]) przestrzenie te stanowią jeden z głównych przedmiotów rozważań. Podana tam jest znaczna liczba twierdzeń, wskazujących na podobieństwo własności tych przestrzeni do własności wielościanów. Natomiast książka ta nic nie mówi o głębokich różnicach, które pokazują, że klasy tych przestrzeni nie można uznać za szukaną klasę quasi-wielościanów.

Pierwszą z osobliwości odróżniających przestrzenie lokalnie ściągalne od wielościanów jest zjawisko, które nazwę *osobliwością Peany*, wiąże się ono bowiem z zauważoną przez PEANĘ możliwością podwyższenia wymiaru przy przekształceniach ciągłych. Z lokalnej ściągalności wynika, że każdy podzbiór zwarty A przestrzeni zwartej lokalnie ściągalnej M, posiadający średnicę dostatecznie małą, daje się ściągnąć do punktu w zbiorze $B \subset M$, którego średnica jest dowolnie mała. Jeżeli jednak M

[1]) S. LEFSCHETZ: *Algebraic Topology*, American Math. Soc. Colloquium Publications, vol. XXVII (1942), 322.

[2]) Cf. S. EILENBERG: *On the problems of Topology*, Annals of Math., **50** (1949), 248.

[3]) S. LEFSCHETZ: *Topics in Topology*, Princeton, 1942.

jest wielościanem, to można po za tym zakładać, że B ma wymiar $\leq \dim A + 1$. Istnieją natomiast przestrzenie zwarte o wymiarze skończonym, lokalnie ściągalne, w których ten dodatkowy warunek dotyczący wymiaru, nie daje się zachować, a więc takie, że przy ściąganiu zbioru A musimy wymieść zbiór o wymiarze $\geq \dim A + 2$. Powiem, że przestrzenie takie wykazują *osobliwość Peany.*

Drugą osobliwością, pojawiającą się wśród przestrzeni zwartych lokalnie ściągalnych jest zjawisko, które nazwać można *osobliwością Brouwera*. L. E. J. Brouwer mianowicie był pierwszym, który skonstruował continuum płaskie, będące wspólnym brzegiem więcej niż 2 obszarów. Continuum to było nierozkładalne i okazało się, jak to następnie udowodnił K. Kuratowski,[4]) że tego rodzaju continuum płaskie jest zawsze, bądź nierozkładalne, bądź też jest sumą dwóch nierozkładalnych, a więc nie jest lokalnie spójne, tym bardziej więc nie jest lokalnie ściągalne. Natomiast w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej istnieją continua lokalnie ściągalne, będące wspólnym brzegiem 3 obszarów. Przykłady takie znane już były dawniej, lecz nie zostały opublikowane.[5]) Ostatnio specjalnie interesujący przykład tego rodzaju został skonstruowany przez p. Lubańskiego.[6])

Jakkolwiek do sformułowania osobliwości *Brouwera* posłużyłem się własnością o charakterze connexusowym — nieprzywiedlnego rozcinania przestrzeni naconajmniej 3 obszary, to jednak łatwo jest nadać jej sformułowanie nexusowe, w którym mowa jest jedynie o samym zbiorze, a nie o przestrzeni otaczającej. Mianowicie osobliwość ta polega na tym, że continuum n-wymiarowe ma n wymiarową liczbę Bettiego większą od jedynki, ale wszystkie jego podcontinua właściwe mają n-wymiarową liczbę Bettiego znikającą.

Jasnym jest, że każdy wielościan daje się rozbić na skończoną liczbę wielościanów o dowolnie małych średnicach. Istnieją natomiast już w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, continua lokalnie ściągalne, niedającę sie rozbić na skończoną liczbę continuów lokalnie ściągalnych, których średnice były by od nich mniejsze. Powiem, że continua takie okazują *osobliwość Mazurkrewicza*, bowiem od Mazurkiewicza pochodzi pierwsza idea konstrukcji takiego przykładu.[7])

Ostatnio udało się zbudować przykład continuum o znacznie bardziej zdumiewających osobliwościach[8]) i to znowu w przestrzeni euklidesowej 3-wymiarowej. Mianowicie przykład continuum lokalnie ściągalnego jednorodnie 2-wymiarowego, którego żadne dwuwymiarowe

[4]) K. Kuratowski: *Sur les coupures irréductibles du plan,* Fundamenta Mathematicae **6** (1924), 138.

[5]) Przykład tego rodzaju skonstruowany został w Warszawie w roku 1937 przez p. Grubę (nie publikowane).

[6]) Dotychczas nie publikowane.

[7]) K. Borsuk i S. Mazurkiewicz: *Sur les rétractes absolus indécomposables,* Comptes Rendus de l'Ac. des Sc., **199** (1934), 110.

[8]) Ukaże się w Fund. Math., **37**.

podcontinuum nie jest już lokalnie ściągalne. O continuum tym można by obrazowo powiedzieć, że stanowi ono płat powierzchniowy bez „dziur" (ponieważ wszystkie jego liczby Bettiego znikają), ale każdy jego „kawałek" ma już nieskończenie wiele „dziur", (ponieważ pierwsza liczba Bettiego jest dla niego nieskończona). Można by też powiedzieć, że continuum to jest nieprzywiedlne ze względu na własność: lokalna ściagalność i wymiar 2.

Z podanych osobliwości wynika, że klasa przestrzeni zwartych lokalnie ściągalnych o wymiarze skończonym jest zbyt obszerna, gdyż zawiera zbiory o własnościach topologicznych wysoce paradoksalnych. Nasuwa się więc myśl, by postulaty zwartości, lokalnej ściągalności i wymiaru skończonego uzupełnić przez postulaty dalsze. Trudność polega jednak na podaniu takiej własności wielościanów, która nię będąc zbyt skomplikowana, prowadziła by do naprawdę użytecznych konsekwencji. Do pewnego stopnia żądania te spełnia postulowanie, że nie może zachodzić osobliwość *Peany*, uzyskuje się bowiem wówczas klasę przestrzeni, dla których wymiar pokrywa się z wymiarami modularnymi w sensie P. Alexandrowa.[9]) Niewiadomo jednak, czy to ostatnie nie zachodzi już dla wszystkich przestrzeni zwartych, lokalnie ściągalnych. Poza tym zaś, usunięcie osobliwości Peany nie eliminuje ani osobliwości Brouwera, ani osobliwości Mazurkiewicza — a więc samo stanowi na pewno warunek zbyt słaby.

Można by próbować dojść do celu drogą pośrednią. Najpierw określić klasę przestrzeni, zasługujących na nazwę quasi-wielościanów przy użyciu pojęć obcych topologii ogólnej, np. opierając się na samym pojęciu elementarno-geometrycznym wielościanu, a następnie dopiero starać się wyodrębnioną klasę scharakteryzować na gruncie pojęć topologii ogólnej. Chciałbym wskazać tu na dwie możliwości.

Jedna z nich przypominała by historię wprowadzenia pojęcia lokalnej spójności w związku z dążeniem do scharakteryzowania ciągłych obrazów odcinka. Łatwo okazać, że zbiory zwarte lokalnie spójne, pokrywają się z klasą obrazów ciągłych wielościanów. Jeżeli zamiast klasy przekształceń ciągłych wziąć jakąś klasę węższą, lecz obejmującą wszystkie homeomorfizmy, to obrazy wielościanów stanowić będą klasę przestrzeni obejmującą wielościany krzywoliniowe, a objętą przez przestrzenie zwarte lokalnie spójne. Na tej drodze łatwo jest określić klasę przestrzeni zwartych, lokalnie ściągalnych o wymiarze skończonym. Będą to mianowicie obrazy wielościanów przy tzw. przekształceniach dwuciągłych.[10]) Być może, że uda się w naturalny sposób wyodrębnić klasę przekształceń, która dawać będzie oczekiwane pojęcie quasi-wielościanów.

---

[9]) Zob. K. Borsuk: *Ensembles dont les dimensions modulaires de Alexandroff coïncident avec les dimensions de Menger-Urysohn*, Fund. Math., **27** (1936), 77—93.

[10]) Zob. K. Borsuk: *On the Topology of Retracts*, Annals of Math., **48** (1942), 1093.

Drogą bardziej naturalną, lecz która o ile mi wiadomo nie była dotychczas próbowana, jest skorzystanie z pewnej przestrzeni zbiorów. Wiadomo, że zbiory zwarte położone w danej przestrzeni metrycznej M można traktować jako punkty pewnej przestrzeni 2^M, przypisując im odległość w sposób określony przez HAUSDORFFA. W przestrzeni 2^M zacierają się topologiczne różnice zbiorów: Zbiory bliskie mogą mieć z gruntu odmienną topologiczną strukturę.

Można jednak przestrzeń zbiorów zwartych zmetryzować inaczej, tak by zbiorom bliskim odpowiadały zbliżone topologiczne własności. Najprostszy jest sposób następujący: Dla każdej funkcji φ, której argumenty i wartości leżą w pewnej przestrzeni metrycznej M, oznaczmy przez $\alpha(\varphi)$ kres górny liczb $\varrho[x, \varphi(x)]$. Jeżeli X i Y są podzbiorami zwartymi niepustymi przestrzeni M, to połóżmy

$$\varrho(X, Y) = \mathrm{Max}[\operatorname*{Inf}_f \alpha(f), \operatorname*{Inf}_g \alpha(g)],$$

gdzie f przekształca X w Y a g przekształca X w Y.

Jeżeli f i g przebiegają wszystkie przekształcenia, to $\varrho(X, Y)$ jest odległością HAUSDORFFA. Jeżeli jednak ograniczymy się do przekształceń ciągłych, to otrzymamy metrykę zupełnie inną. Przy jej użyciu wiele własności topologicznych zachowuje się niezmienniczo przy przejściu do granicy. Jeżeli naprzykład $X_n \to X$ i $p^k(X_n) \leqq p$ (gdzie p^k oznacza k-wymiarową liczbę Bettiego), to i $p^k(X) \leqq p$. Podobnie z $\dim X_n \leqq d$ wynika $\dim X \leqq d$. Podobnie, jeżeli $X_n \to X$ i X_n ma własność F, polegającą na istnieniu punktu stałego przy wszelkich przekształceniach ciągłych na podzbiór, to również X ma własność F. Inaczej mówiąc, w przestrzeni tej ogół zbiorów o liczbie Bettiego $\leqslant p$, lub zbiorów o wymiarze $\leqq d$, lub zbiorów o własności F jest domknięty.

Wielościany w przestrzeni tej tworzą pewien podzbiór. Domknięcie tego podzbioru stanowi klasę kompaktów w pewnym sensie dających się przybliżać przez wielościany. (Nie wiadomo, czy przynależność do tej klasy stanowi własność topologiczną.) Nie sądzę, by wyróżniona w ten sposób klasa przestrzeni zwartych stanowiła klasę naprawdę godną uwagi, z punktu widzenia zagadnienia zdefiniowania klasy quasi-wielościanów. Bowiem przyjęta metryka nie wydaje się dostatecznie precyzyjnie uwydatniać topologicznych różnic między zbiorami, a po za tym posiada ten istotny brak, że przestrzeń zbiorów zwartych przy jej użyciu nie jest zupełna. Sądzę jednak, że przy innym, bardziej ostrożnym określeniu metryki, będzie można na drodze tej dojść do przestrzeni zbiorów, w której domknięcie klasy wielościanów stanowić będzie klasę przestrzeni zasługującą naprawdę na nazwę quasi-wielościanów.

*

Résumé. — Streszczenie.

Les polytopes, les quasi-polytopes et la topologie générale.

KAROL BORSUK, Warszawa.

La notion du polytope n'appartient pas à la topologie, mais à la géométrie élémentaire. Lorsqu'on veut caractériser les polytopes par les notions de la topologie générale, on rencontre des difficultés qui semblent être insurmontables. Cependant on peut caractériser d'une manière purement topologique quelques classes des espaces, plus générales que la classe des polytopes, mais qui jouissent des propriétés topologiques semblables à celles des polytopes. Parmi ces classes, la plus importante est la classe C des espaces localement contractiles, compacts et de dimension finie (cette classe coïncide avec la classe des rétractes absolus de voisinage de dimension finie). Les propriétés homologues (groupes de Betti) et homotopiques (groupes homotopiques) de ces espaces coïncident, en général, avec celles des polytopes. Cependant il existe des phénomènes qui montrent que la structure topologique d'un espace A appartenant à la classe C peut être essentiellement différente de la structure topologique des polytopes.

L'auteur indique trois types de phénomènes topologiques qui existent pour les espaces appartenant à la classe C, mais qui sont impossibles pour les polytopes:

Le *phénomène de Peano* a lieu pour l'espace A, lorsqu'il existe des sous-ensembles fermés E de A homotopes à 0 dans A, tels que pendant chaque déformation continue contractant E dans A vers un seul point, l'ensemble E balaie un sous-ensemble de A dont la dimension surpasse $\dim E + 1$.

Le *phénomène de Brouwer* a lieu pour l'espace A de dimension n, lorsque le nombre de Betti de dimension n de A est plus grand que 2, tandis que le nombre de Betti de dimension n de tout ensemble fermé $E \subset A, E \neq A$ s'annule.

Le *phénomène de Mazurkiewicz* a lieu pour l'espace $A \in C$, lorsque A ne peut être décomposé en une somme d'un nombre fini d'ensembles appartenant à C et ayant les diamètres plus petits que le diamètre de A.

On a réussi récemment de construire un exemple d'un espace jouissant des propriétés encore plus paradoxales que le phénomène de *Mazurkiewicz,* à savoir un espace $A \in C$ qui est une multiplicité cantorienne de dimension 2, telle que pour tout continu $E \subset A, E \neq A$ de dimension 2, le nombre de Betti de dimension 1 est infini. Or A est un continu localement contractile de dimension 2 *irréductible*.

L'auteur indique les moyens par lesquels on peut déterminer les classes des espaces contenant tous les polytopes, mais plus spéciales que la classe C. Un de ces moyens consiste en l'emploi de l'espace de tous les ensembles fermés, métrisé d'une telle manière, que les ensembles dont la distance est petite, jouissent des propriétés topologiques peu différentes.