Bohuslav Hostinský

Novější práce o Markovových řetězech a příbuzných úlohách

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 2, 48--62

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123054

volný bod $C \neq B$ a promítněme obě křivky Γ a $K\Gamma$ se středu C do libovolné nadroviny. Potom oba průměty mají v průmětu bodu B analytický styk druhého řádu.

K-linearisující transformace závisí na volbě tečné kolineace K. Volíme-li za K specielně lokální kolineaci, potom jest

$$\sum_{i=1}^{n} c_{is}^{i} = 0 \text{ pro } 1 \leq s \leq n.$$

V následujících článcích budeme probírati takové korespondence mezi dvěma prostory, jejichž K-linearisující transformace mají určité geometrické vlastnosti.

LA DUALITÉ DANS LES ESPACES (F) ET (LF).

JEAN DIEUDONNÉ, Nancy.

L'objet de la conférence était le mémoire écrit par J. Dieudonné et L. Schwartz qui sera publié dans les Annales de Grenoble en 1950.

*

Výtah. — Résumé.

Dualita v prostorech (F) a (LF).

JEAN DIEUDONNÉ, Nancy.

Přednáška se týkala práce, kterou napsali J. Dieudonné a L. Schwartz a která bude uveřejněna v Annales de Grenoble v roce 1950.

NOVĚJŠÍ PRÁCE O MARKOVOVÝCH ŘETĚZECH A PŘÍBUZNÝCH ÚLOHÁCH.

BOHUSLAV HOSTINSKÝ, Brno.

V dnešní přednášce se pokusím podati přehled hlavních směrů v bádání o theorii Markovových řetězů a o příbuzných úlohách za posledních patnáct let. R. 1934 jsem uveřejnil v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky dva referující články (**63**, 167; **64**, 94) z tohoto oboru; přítomný referát je jejich pokračováním.[1])

Markovův řetěz s konečným počtem eventualit. Konáme neomezenou řadu pokusů, z nichž každý má za výsledek jednu z r even-

[1]) Čísla v hranatých závorkách odkazují k připojenému bibliografickému seznamu.

tualit $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Budiž p_{ik} pravděpodobnost, že $(n+1)$-tý pokus dá výsledek E_k za předpokladu, že n-tý pokus dal výsledek E_i. Předpokládáme dále, že řetěz je homogenní t. j. že veličiny p_{ik} jsou nezávislé na n. Je-li obecně $P_{ik}^{(m)}$ pravděpodobnost, že $(n+m)$-tý pokus dá výsledek E_r za předpokladu, že n-tý pokus dal E_i, platí rovnice ($P_{ik}^{(1)} \equiv p_{ik}$)

$$P_{ik}^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{r} P_{ij}^{(n)} \cdot p_{jk}, \ldots \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij}^{(n)} = 1, \quad i, k = 1, 2, \ldots, r, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Nejzajímavější z otázek, které si klademe o výsledcích v řadě pokusů, jichž pravděpodobnosti jsou spojeny v Markovův řetěz, je tato: za kterých podmínek platí t. zv. ergodický princip, totiž kdy existuje $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)}$ jakožto číslo P_k nezávislé na indexu i? Zobrazme si výsledky pokusů geometricky. Budiž dáno r pevných bodů $A_1, A_2, \ldots, A_r$ a pohyblivý bod B, jehož poloha splyne s A_k, dá-li některý pokus výsledek E_k. Podle výsledků jednotlivých pokusů mění se poloha bodu B. Veličiny p_{ik} jsou pravděpodobnosti přechodu z polohy A_i do A_k; $P_{ik}^{(n)}$ je pravděpodobnost, že byl-li bod B původně v poloze A_j, přejde po n „skocích" (pokusech) do polohy A_k. Výsledky pokusů jsou tak zobrazeny nespojitým „Brownovým pohybem". Ergodický princip vyjádří se pak takto: nechť byla počáteční poloha bodu B jakákoli, pravděpodobnost, že po nekonečně velkém počtu pokusů bude B v A_k, totiž $P_k = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)}$, závisí jen na k. Markov dokázal, že ergodický princip platí, jsou-li všechny p_{ik} kladné; pro $n \to \infty$ přejdou rovnice (1), platí-li princip, v

$$P_k = \sum_{j=1}^{r} p_{jk} \cdot P_j, \quad \sum_{j=1}^{r} P_j = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, r. \tag{2}$$

Rovnicemi (2) jsou hodnoty P_k jednoznačně určeny.

Je otázka, platí-li ergodický princip v případech, kdy některé z veličin p_{ik} jsou rovny nule. Rozbor jednotlivých případů vychází od studia kořenů charakteristické rovnice; je to „sekulární rovnice", kterou obdržíme takto: odečteme od veličin p_{ii} proměnnou λ a položíme takto upravený determinant r-tého stupně $\|p_{ik}\|$ rovný nule. Romanovsky ukázal r. 1929, že v případě, kdy charakteristická rovnice má vesměs jednoduché kořeny $1, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{r-1}$ (jeden z kořenů je vždy roven jedné; absolutní hodnoty kořenů nemohou býti menší než 1), vyjádří se $P_{ik}^{(n)}$ takto:

$$P_{ik}^{(n)} = P_k + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\varphi_{kj}\,\psi_{ij}}{\lambda_j^n}. \tag{3}$$

Z rovnice (3) vyplývá přímo ergodický princip, nemá-li žádný z kořenů $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{r-1}$ absolutní hodnotu rovnou 1. Je-li na př. jeden z kořenů $= -1$, veličiny $P_{ik}^{(n)}$ oscilují, mění-li se n, a nemají limitu pro $n \to \infty$. Romanovsky [1] v pozdější obsáhlé práci zobecnil rovnici (3) pro případy, kdy charakteristická rovnice má mnohonásobné kořeny. Fréchet, jenž už dříve se zabýval podrobně vlastnostmi veličin, napsal další doplněk [8], ve kterém rozebírá podmínky pro platnost ergodického principu; ve své knize [Fréchet 10] podává obšírný přehled o těchto otázkách. W. Doeblin, německý emigrant, jenž se uchýlil do Paříže, studoval tam u Frécheta a byl z nejlepších jeho žáků; stal se obětí války. Doeblin napsal mnoho originálních prací vynikajících přesností o Markovových řetězech; v článku z r. 1938 [2] podal soustavný výklad o celé theorii. Připomínám knihu o počtu pravděpodobnosti, kterou napsal S. Bernštejn [4]; obsahuje přesné výklady o řetězech s pozoruhodnými příklady.

Onicescu a Mihoc mnoho pracovali v tomto oboru, a řešili statistické úlohy v souvislosti s Markovovými řetězy; uvádím jejich práci [1] a spis [2], v němž referují o theorii řetězů. Různé příklady na užití theorie jsou v pracech Frécheta [9, 10] a Hostinského [3]. Sarymsakov [3] srovnává původní Markovovu methodu, jež odvozuje ergodický princip bez zvláštního vzorce pro veličiny $P_{ik}^{(n)}$ s methodou Romanovského založenou na explicitním jich vyjádření a vhodnou k numerickému počítání. Onicescu-Mihoc [3] užívají charakteristických funkcí (integrálů Fourierova typu utvořených z pravděpodobností přechodu).

Poznamenejme, že v případě nehomogenního řetězu, kdy pravděpodobnost $P_{ik}^{(m,n)}$ přechodu za stavu i do k po $(n - m)$ pokusech závisí na pořadovém čísle pokusu m-tého i n-tého $(n > m)$, platí místo (1) rovnice

$$P_{ik}^{(m,n)} = \sum_{j=1}^{r} P_{ij}^{(m,u)} P_{jk}^{(u,n)}, \quad m < u < n. \tag{4}$$

Zavedení spojité nezávisle proměnné veličiny (času). Předpokládáme stále, že bod B mění svou polohu tak, že v každém okamžiku splývá s některým z bodů $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Připustíme však, že pozorujeme polohu bodu B v libovolném okamžiku; pravděpodobnost že bod, jenž v okamžiku s byl v poloze A_i, bude v pozdějším okamžiku t v poloze A_k, budiž funkcí $P_{ik}(s, t)$ indexů i, k a obou spojitě proměnných veličin s, t. Místo rovnice (4) bude pak platiti

$$P_{ik}(s, t) = \sum_{j=1}^{r} P_{ij}(s, u)\, P_{j,k}(u, t), \quad s < u < t \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{r} P_{ik}(s, t) = 1.$$

Místo dřívějších indexů m a n nastupují zde spojitě proměnné s a t.

Za určitých podmínek převádí se tato soustava rovnic na soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial P_{ik}(s,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{r} P_{ij}(s,t)\, u_{jk}(s,t), \tag{6}$$

kde funkce u_{jk} považujeme za známé. Je zde obdoba ergodického problému: funkce $P_{ik}(s, t)$ jež vyhovují rovnicím (5) nebo (6), má asymptotickou hodnotu, roste-li t do nekonečna. Zvláště zajímavý je homogenní případ, kdy funkce $P_{ik}(s, t)$ závisí jen na rozdílu t — s proměnných a na i, k. V tom případě máme místo (5) rovnice

$$\varphi_{ik}(u+v) = \sum_{j=1}^{r} \varphi_{ij}(u)\, \varphi_{jk}(v), \quad \sum_{j=1}^{r} \varphi_{ij}(u) = 1, \tag{7}$$

a místo (6) rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_{ik}(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{r} u_{jk}(t)\, \varphi_{ij}(t).$$

Index i lze vynechati; pro každé i ($i = 1, 2 \ldots r$) vyhovují $\varphi_{ik} = x_k$ soustavě lineárních diferenciálních rovnic:

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{r} u_{jk}(t) \,.\, x_j(t). \tag{8}$$

Povaha funkcí vyhovujících této soustavě záleží ovšem na povaze koeficientů u_{jk}. Fréchet [1, 10] se podrobně zabýval řešením těchto rovnic. Jedna z method, kterých lze užíti k řešení, je Volterrova methoda „integrace lineárních substitucí". Soustava lineárních rovnic (8) určuje totiž nekonečně malé změny $\mathrm{d}x_i$ veličin x_i, odpovídající přírůstku d_t času, jakožto lineární funkce hodnot x_i. Hledaný konečně veliký přírůstek veličiny $x_i(t)$ po uplynutí konečného časového intervalu (t pojímáme jako čas) jeví se jakožto součet nekonečně malých přírůstků; při tom přírůstky veličin dxi jsou určeny infinitesimální lineární substitucí veličin x_i. Hledané hodnoty neznámých x_i vytvořují se z těchto malých přírůstků obdobně jako rotace o konečný úhel se vytvořuje sledem postupně provedených infinitesimálních rotací; viz Hostinský [2; 8 chap. II] a Volterra-Hostinský [1].

Elfving [1, 2] se zabýval vztahem, který je mezi případem pravděpodobností $P_{ik}(s, t)$ jakožto spojitých funkcí času a případem obyčejných Markovových řetězů. Popov [1] studoval asymptotický průběh funkcí $x_i(t)$ vyhovujících rovnicím (8) v případech, kdy koeficienty $u_i(t)$ jsou buď konstantní nebo konvergují k určitým limitám, pro $t \to \infty$. Další studium těchto otázek by se mohlo opírati též o výsledky, ke kterým došel Peyovič [1] ve svých úvahách o asymptotických řešeních diferenciálních rovnic lineárních. Truksa [1] vyšetřoval užitím diferenciálních rovnic závislost uvnitř statistických souborů.

Markovovy řetězy s nekonečným spočetným počtem eventualit. Je-li nekonečně mnoho případů, které mohou býti výsledkem pokusu a uvažujeme-li o nekonečné posloupnosti pokusů, jsou úvahy složitější. FORTET [1,2] ukázal, že i zde platí ergodický princip za obdobných předpokladů jako v případě, kdy počet eventualit je konečný. Jak sám praví v dodatku ke své druhé práci, jeho výsledky byly předstiženy pracemi KOLMOGOROVÝMI [4, 5], které vznikly přibližně současně. KOLMOGOROV [5] upozornil mimo jiné na to, že bod B při „Brownově pohybu" (v případě, že je nekonečně mnoho poloh $A_1, A_2, A_3, \ldots$) se obecně nekonečně mnohokráte vrací do polohy, ve které jednou byl, anebo se do ní vůbec nevrací. Tato úvaha odpovídá tomu co dokázal BOREL (Rendiconti del Circolo matematico, Palermo, **27**, 247; 1909. Mathem. Annalen **72**, 578; 1912): konáme-li neomezenou řadu pokusů (závislých nebo nezávislých) a je-li pravděpodobnost, že se vyskytne určitý výsledek E při jednom pokusu, kladná, je pravděpodobnost, že se výsledek E vyskytne celkem nekonečně mnohokrát, rovna buď jedné nebo nule.

SARYMSAKOV [1, 2] odvodil věty o limitách pravděpodobnosti vycházeje z prací FROBENIOVÝCH a ROMANOVSKÉHO platných pro řetězy (matice konečného stupně) s konečným počtem eventualit. V některých případech, kdy počet eventualit je při každém jednotlivém pokuse konečný, roste však s počtem pokusů do nekonečna, lze studovati pravděpodobnosti přechodu jednodušším způsobem [HOSTINSKÝ 3]. DOOB [3] zabýval se též případem nekonečně velikého počtu eventualit.

Brownův pohyb po úsečce a Chapmanova rovnice. Předpokládejme nyní, že bod B se pohybuje na úsečce ležící na ose, jejíž krajní body jsou $x = a$, $x = b$, $a < b$. Pravděpodobnost, že B bude v okamžiku t mezi y a $(y + \mathrm{d}y)$, byl-li v okamžiku s $(s < t)$ v poloze $x (a \leq x \leq b,$ $a < y < b)$, budiž $\Phi(x, y, s, t)\, \mathrm{d}y$. Funkce Φ, kterou nazveme zkrátka pravděpodobností přechodu (je to vlastně hustota pravděpodobnosti), vyhovuje *Chapmanově rovnici*

$$\Phi(x, y, s, t) = \int_a^b \Phi(x, z, s, u)\, \Phi(z, y, u, t)\, \mathrm{d}z, \quad s < u < t, \quad \int_a^b \Phi\, \mathrm{d}y = 1. \tag{9}$$

Nejzajímavější je případ „homogenní vzhledem k času", kdy Φ závisí na s a t jen tak, že je funkcí jejich rozdílu. Rovnice (9) přechází pak v rovnici Smoluchovského

$$\varphi(x, y, u + v) = \int_a^b \varphi(x, z, u)\, \varphi(z, y, v)\, \mathrm{d}z. \tag{9a}$$

Roste-li u do nekonečna, konverguje za určitých podmínek $\varphi(x, y, u)$ k určité limitní hodnotě $\varphi(y)$, která vyhovuje rovnici

$$\varphi(y) = \int_a^b \varphi(z) \, . \, \varphi(z, y, v)\, \mathrm{d}z, \quad \int_a^b \varphi(y) \mathrm{d}y = 1. \tag{10}$$

Rovnice (9a) je obdobná rovnici (4); indexy i, j, k jsou zde nahraženy spojitě proměnnými x, y, z a indexy m, n, u jsou nahraženy spojitě proměnnými s, t, u, které mají význam času. Ergodický princip vyjádřený rovnicí (10) je obdobný principu vyjádřenému rovnicemi (2). Pro obecnou rovnici (9) platí též za určitých podmínek obdobný princip.

Výzkum Brownova pohybu po přímce zakládá se na řešení uvedených rovnic. Najdeme-li nějakou funkci Φ nebo φ, která vyhovuje rovnici (9) nebo (9a), považujeme ji za pravděpodobnost přechodu z jedné polohy do druhé při Brownově pohybu. Fréchet [1] srovnává dvě methody k analyse ergodického principu, obdobné těm, kterých se užívá v případě obyčejného Markovova řetězu; buď sledujeme vlastnosti funkce $\varphi(x, y, t)$ s rostoucím t vycházejíce z rovnice (9a) nebo vycházíme od explicitních výrazů pro $\varphi(x, y, t)$ sestrojených na způsob Romanovského vžorce (3). Fréchet [2, 4, 5, 6] užíval této druhé methody a podrobně se zabýval vlastnostmi funkcí, které vznikají iterací jádra Fredholmovy integrální rovnice v souvislosti s ergodickým principem [3, 7]. Jiná methoda k řešení funkčních rovnic (9) a (9a) se zakládá na integrování lineárních funkčních transformací. Ukázal jsem, jak se této methody, zavedené původně Volterrou k řešení obyčejných diferenciálních rovnic lineárních, užije k řešení uvažovaných problémů počtu pravděpodobnosti [Hostinský 2, 8; Volterra-Hostinský 1, kap. 16—18]. Při tom jsem hleděl upraviti nekonečné řady, kterými se vyjadřují funkce Φ nebo φ tak, aby každý člen sám o sobě měl význam se stanoviska počtu pravděpodobnosti, takže správnost formulí se stává intuitivní; poukázal jsem na použitelnost methody v případě obecných problémů difuse, kinetické theorie plynů a časových změn kolektivů [Hostinský 4, 5, 6, 10, 11, 13, 14]. Ve svých úvahách jsem připouštěl dvojí změny v poloze bodu: jednak pomalé změny (pravděpodobnost, že se bod B pošine o konečnou délku během nekonečně krátké doby se rovná nule), jednak náhlé skoky.

Kolmogorov ukázal už ve svých starších pracech, že funkce vyhovuje určitým parciálním diferenciálním rovnicím. Feller [1] vycházeje z poněkud jiných předpokladů dokázal existenci řešení pro tyto diferenciální rovnice a tedy i pro Chapmanovu rovnici; připouští spojité i náhlé změny v poloze bodu.

Krutkov [1] se zabýval Brownovým pohybem a Kolmogorov [6] rozšířil svou původní methodu, založenou na rovnici (9) a na příslušných parciálních diferenciálních rovnicích, v tom smyslu, že uvažuje o případu, kdy okamžitý stav bodu B není určen jen jeho souřadnicí x nýbrž i příslušnou složkou rychlosti $dx \mid dt$; pravděpodobnosti přechodu (a to nejen při pohybu na přímce, nýbrž vůbec v mnohorozměrném prostoru) závisí v tomto případě na poloze i na rychlosti jak začátečního stavu, tak konečného. Feldheim [1] studoval charakteristické funkce (odvozené Fourierovou transformací) příslušné pravděpodobnostem přechodu.

Kdežto ze známé pravděpodobnosti přechodu neplyne vlastně nic bližšího o povaze Brownova pohybu, užili někteří badatelé zcela jiné methody k rozboru ergodického principu. D. Birkhoff sledoval na základě Poincaréových studií o křivkách definovaných diferenciálními rovnicemi vývoj soustavy, jejíž okamžitý stav je definován bodem B v Gibbsově fásovém prostoru (bod je určen hodnotami Lagrangeových souřadnic a jich derivací dle času). Počátečním stavem je vývoj jednoznačně určen; bod B se pohybuje po zcela určité křivce (roste do nekonečna) a platí známá Liouvilleova věta o invarianci objemu. Za určitých předpokladů o ideálních trajektoriích bodu B platí ergodický princip: střední hodnota doby, po kterou bod B je uvnitř určité části fásového prostoru, je úměrná jejímu objemu. Nehledě k tomu, že pojem ideálních ničím nerušených trajektorií má určité obtíže, užívali první badatelé v tomto oboru „statistické mechaniky" dosti složitých method. Eberhad Hopf [1, 2, 3] podal přehled o těchto theoriích. Chinčin zjednodušil důkaz ergodického principu na tomto základě a Kolmogorov [6] podal obvzláště jednoduchý důkaz, jenž vychází z věty: za obecných předpokladů o středních hodnotách neomezené posloupnosti veličin $x_1, x_2 \dots$ závislých na náhodě, je pravděpodobnost, že aritmetický střed $\frac{1}{n}$. . $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ má limitu pro $n \to \infty$, rovna jedné.

Řešení obecné Kolmogorovovy rovnice pro pravděpodobnost přechodu. Už ve své základní práci z r. 1931 (Math. Ann. 104) formuloval Kolmogorov rovnici, které má vyhověti pravděpodobnost přechodu obecněji. Označme obecně písmenem x bod v prostoru R, ve kterém se pohybuje bod B, X budiž část prostoru R a $\mathrm{d}X$ element prostoru, který je obsažen v X a který sám obsahuje bod x. Podobně y, Y, $\mathrm{d}Y$ atd. Pravděpodobnost, že bod B, jenž v okamžiku s je v poloze x, bude v okamžiku $t(s < t)$ v oboru Y, budiž $\Phi(x, Y, s, t)$; pak platí místo (9) rovnice Kolmogorovova

$$\Phi(x, Y, s, t) = \int_R \Phi(x, \mathrm{d}Z, s\, u)\, \Phi(z, Y, u, t), \quad s < u < t, \tag{11}$$
$$\int_R \Phi(x, \mathrm{d}Y, s, t) = \Phi(x, R, s, t) = 1,$$

neboť $\Phi(x, Y, s, t)$ je additivní funkce oboru Y. Integrál na pravé straně rovnice (11) je zobecněný ve smyslu Stieltjesově. Pospíšil [1] obecně rozřešil rovnici (11); funkce Φ je vyjádřena v jeho práci nekonečnou řadou, jejíž členy jsou konstruovány na základě libovolné funkce $A(x, Y, s)$, která je additivní vzhledem k oboru Y. Řada Φ je pozoruhodná tím, že dává přímo řešení homogenní integrální rovnice Fredholmova typu; je-li $\Phi(x, Y, s, t)$ jádro rovnice, je $\Phi(x, Y, t, s)$ příslušná resolventa [Hostinský 7, 8]. Doeblin [3] rozřešil rovnici jinou methodou; jeho řešení je vyjádřeno nekonečnou řadou, jejíž každý člen má význam určité pravděpodobnosti a hledaná funkce se jeví jako pravděpodobnost úhrnná. Pospíšilovo řešení je odvozeno ryze analyticky; DOEBLIN užívá důsledně interpretace s hlediska počtu pravděpodobnosti a předpokládá, že Brownův pohyb se děje jen skoky: bod B setrvává po nějaký čas ve své posici, kterou v určitém okamžiku náhle mění. Takovýmto ryze nespojitým pohybem se zabývali dále FELLER [2] a DUBROVSKY [1, 2, 3, 4]. DOEBLIN [4] pojednal o „smíšených pohybech", které jsou po částech spojité a v pracích [1, 5] vyložil soustavně vlastnosti Brownových pohybů. DOEBLIN a FORTET ve společné práci [1] odvodili vzorec pro Φ obdobný vzorci Romanovského (3). JAGLOM [1] objasnil podmínku dostačující, aby platil ergodický princip. KRYLOV a BOGOLJUBOV [1] studovali podmínky pro ergodický princip v případě rovnice Smoluchovského. TCHEN-CHAN-MOU [1] se zabýval obšírně středními hodnotami a korelacemi v případě, kdy malé částice jsou suspendovány v tekutině při turbulentním proudění.

YOSIDA [1 až 6], KAKUTAMI [1, 2], WIENER [1] a DOOB [1, 2] řešili otázky o platnosti ergodického principu a j. užívajíce Banachovy theorie o abstraktních lineárních prostorech. Některé z těchto prací [YOSIDA 5, WIENER 1, KRYLOV-BOGOLJUBOV 2] jsou ve vztahu k dříve zmíněnému hledisku statistické mechaniky. Zvláštním způsobem je pojat tento vztah v práci KRYLOVOVĚ a BOGOLJUBOVOVĚ [3]; její význam je v tom, že v ní přichází k platnosti jak původní pojem Markovova řetězu, tak pojmy vytvořené v statistické mechanice. Abstraktních method užívají též BEBUTOV [1] a DOOB-AMBROSE [1].

Je očividno, že abstraktní methody, kterých užil už POSPÍŠIL [1], vedly v jeho práci a v pracech právě uvedených autorů k novým, dosud neznámým výsledkům. DOEBLIN [3] poznamenal, že tyto methody jsou trochu na úkor intuitivní povaze úlohy. Vždyť cílem, který sledujeme, je vyjádřiti vztah mezi neznámou pravděpodobností a určitými danými pravděpodobnostmi; zdá se, že podrobným rozborem výsledků, ke kterým došli uvedení autoři, se podaří odvoditi hledaná řešení prostším způsobem založeným na elementárních úvahách o pravděpodobnostech.

Funkce závislé na náhodě (stochastické procesy). V řadě pokusů můžeme zavésti pravděpodobnost, že n-tý pokus dá výsledek E_k, závislou nejen na tom, jaký výsledek dal pokus $(n-1)$tý, nýbrž i na tom, jaký výsledek měl pokus $(n-2)$tý atd.; pravíme pak, že pravděpodobnosti výsledků v takové řadě jsou spojeny v Markovův řetěz druhého, třetího atd. řádu. Tak dospíváme k pojmu řetězu nekonečně vysokého řádu, při kterém pravděpodobnost výsledku každého pokusu závisí na výsledcích všech předešlých pokusů. Nahraďme nespojitě proměnný index (pořadové číslo pokusu) spojitě proměnnou veličinou t (časem). Tak dospíváme k pojmu funkce $x(t)$ času t, která závisí na náhodě. Také se říká méně vhodně, že veličiny $x(t)$ tvoří stochastický proces. Loňského roku zemřelý znamenitý ruský matematik EUGEN SLUCKIJ přenesl pojmy infinitesimálního počtu na tyto funkce. Funkce $x(t)$ závislá na náhodě je spojitá ve smyslu pravděpodobnosti, má-li (při pevném t') střední hodnota výrazu $|x(t) - x(t')|$ za limitu nulu pro $\lim(t - t') = 0$. Pravděpodobnost, že $x(t) = \alpha$, může záviseti na tom, jakých hodnot nabyla funkce $x(t)$ pro jiné hodnoty proměnné t, na př. $t', t'', \ldots$ Jsou-li příslušné pravděpodobnosti vždy funkcemi jen rozdílů $t - t', t - t'', \ldots$, pravíme, že funkce $x(t)$ (stochastický proces) je stacionární. V tom případě je vliv, který má nějaká hodnota $x(t')$ funkce na pravděpodobnost hodnoty $x(t)$ jen funkcí časové odlehlosti $t - t'$. Různými vlastnostmi stacionárních funkcí se zabýval již dříve CHINČIN, později WOLD [1], KOLMOGOROV [7, 8] a KOSULAJEV [1]; BLANC-LAPIERRE [1] užívá stacionárních posloupností při studiu fluktuací elektrických proudů.

Srovnáme-li s jednoduchým Markovovým řetězem, jeví se nám obecná stacionární funkce $x(t)$ jakožto dalekosáhlé zobecnění řetězu. Ale zajímáme-li se o ergodický princip, t. j. o asymptotické hodnoty funkce $x(t)$ za určitých podmínek, docházíme k rovnicím stejného tvaru s těmi, které vyjadřují ergodický princip pro obyčejné řetězy. Neboť vždycky existují pravděpodobnosti, že je-li $x(t') = \alpha$, bude $x(t) = \beta$; $(t < t)$ závislé jen na α, β a na rozdílu $t - t'$ a z těch se vychází, s tohoto hlediska je původní Markovův důkaz ergodického principu základem i v zobecněné theorii.

P. LÉVY uveřejnil r. 1948 knihu [6] o stochastických procesech a Brownově pohybu, velmi bohatou obsahem, která mimo jiné shrnuje četné jeho starší práce i jiných autorů. Část knihy je věnována zvláštnímu zobecnění Brownova pohybu po přímce. Skutečný Brownův pohyb (vlastně jeho průmět do přímky) je pohyb po částech rovnoměrný; částice vznášející se v tekutině podléhá nárazům od molekul a během časového intervalu mezi dvěma nárazy se pohybuje rovnoměrně. Předpokládáme, že délka volné dráhy mezi dvěma nárazy se řídí Gaussovým zákonem chyb. Úsečka pohyblivého bodu B po uplynutí libovolně dlouhého časového intervalu se řídí rovněž tím zákonem, ovšem s přiměřeně větší střední kvadratickou chybou. LÉVY interpoluje nespojitý Brownův pohyb tak, že zavádí funkci $X(t)$ závislou na náhodě a definovanou pro libovolnou hodnotu času; přírůstky $X(t') - X(t)$ funkce řídí se zákonem chyb pro libovolná t, t' se střední kvadratickou chybou úměrnou přírůstku $t' - t$. Z četných originálních výsledků uvádím: Výpočet zákonů pravděpodobnosti, kterými se řídí maximum funkce $X(t)$ v daném intervalu, pravděpodobné rozložení kořenů rovnice $X(t) = 0$, výpočet (pro případ Brownova pohybu v rovině) pravděpodobnosti, že bod vycházející z dané polohy dospěje za danou dobu po prvé do jiné dané polohy, základní vlastnosti Markovových řetězů závislých na několika parametrech; o tomto thematu jednají též jeho práce [4] a [5]. Lévyova kniha je zakončena dodatkem, který napsal Loeve o zvláštních funkcích závislých na náhodě. Tyto funkce se vyznačují tím, že střední hodnoty čtverců $[X(t)]^2$ a součinů $X(t) . X(t')$ jsou ohraničené pro libovolné hodnoty proměnných t, t' a jsou poměrně snadno přístupné počtu.

Viz též Loeve [1]. R. Fortet [3] studoval řetězy v souvislosti s parciálními rovnicemi parabolického typu a s Andréovým principem symetrie.

Veličinu, která se řídí Gaussovým zákonem chyb, lze rozděliti na součet několika sčítanců a každý sčítanec se řídí zase Gaussovým zákonem. Podobnou vlastnost mají i jiné zákony; o tom viz CHINČIN [1] a LÉVY [1]. W. FELLER [3] podal výstižný přehled novějších prací o stochastických procesech.

Diferenciální rovnice s veličinami závislými na náhodě. S. BERNŠTEJN poukázal k tomu, že theorie řetězů, která podle Markova počítá s pravděpodobnostmi přechodu, dá se formulovati také tak, že se zavedou do počtu přímo veličiny odpovídající výsledkům jednotlivých pokusů. Tyto veličiny, závislé na náhodě, určují se každá z hodnoty odpovídající předešlému pokusu lineárními substitucemi (BERNŠTEJN [1], [3], str. 214—215). Dalším rozšířením došel BERNŠTEJN k typu rovnic

$$Y_{n+1} = F_n(Y_n, \alpha_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

kde F_n jsou dané funkce; α_n jsou veličiny závislé na náhodě, mezi nimiž není vztahů. Takové rovnice nazývá BERNŠTEJN [2, 3, p. 485—546] stochastickými diferenčními rovnicemi pro neznámé Y_n a uvažuje dále o stochastických diferenciálních rovnicích vznikajících limitními přechody z diferenčních. O limitních hodnotách veličin, roste-li n do nekonečna, viz též práce GINSBURGOVY [1, 2]. KRYLOV a BOGOLJUBOV [3] rozřešili rovnici toho druhu, totiž rovnici harmonického pohybu po přímce rušeného náhodnými impulsy. Nepochybuji o tom, že pojem diferenciálních rovnic s veličinami závislými na náhodě je významný pro matematickou fysiku, neboť průběh jakéhokoliv zjevu pojímáme vždy jako výsledek jednak sil řídících se určitými zákony, jednak nahodilých poruch.

O reversibilitě přírodních dějů. Pojem reversibilního neboli zvratného procesu patří k nejtěžším ve fysice, neboť nelze přesně odlišiti zvratné od nezvratných a vystihnouti jasně pojem procesu přibližně zvratného. R. 1935 současně a v podstatě stejnou methodou jsme se zabývali pojmem zvratnosti jednak já s POTOČKEM, jednak KOLMOGOROV. Základem bylo srovnání pravděpodobnosti, že soustava přejde během určité doby z konfigurace A do B, s pravděpodobností, že je-li nyní v B, byla před tou dobou v A. Sledovali jsme obrácené nespojité Markovovy řetězy [HOSTINSKÝ 1; HOSTINSKÝ-POTOČEK 1]. KOLMOGOROV [2, 3] se zabýval případem spojitě proměnných. POTOČEK podal později další doplňky jednak pro nespojité řetězy [1], jednak pro spojité [2, 3]. O zvratnosti řetězů uvažoval ELFVING [1, 3], viz též práci JAGLOMOVU [2], jež je psána ve směru KOLMOGOROVOVĚ.

Tím končím svůj přehled; domnívám se, že Markovovy řetězy a funkční rovnice plynoucí z nich jednoduchým zobecněním poslouží k zdokonalení statistických theorií ve fysice. Docházíme k novým a přesnějším formulacím zákonů o pravděpodobnostech než byly ty, kterých na př. používá klasická kinetická theorie plynů. Je jen třeba, aby nové methody byly v konkretních úlohách podrobně vypracovány.

BIBLIOGRAFICKÝ SEZNAM

AMBROSE W., viz DOOB J. L.

BEBOUTOFF M.: 1. Markoff chains with a compact state space, Dokl. Ak. N. SSSR, **30** (1941), 482.

BERNŠTEJN S.: 1. O linějnych kvasi-neprěryvnych cěpach Markova I, II, Dokl. Ak. Nauk SSSR, 1934, I, 1; II, 361.
2. Équations différentielles stochastiques, Actualités scientif. et ind., No 738 (1938).
3. Těorija věrojatnostěj, Izd. četvertoje, Moskva, 1946.

BOGOLJUBOV, viz KRYLOV.

CHINČIN A., viz KHINTCHINE.

DOEBLIN W.: 1. Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples, Bull. Math. Soc. d. Sc. Bucuresti, **39** (1937), No 1, 2.
2. Exposé de la Théorie des chaines simples constantes de Markoff à un nombre fini d'États, Revue math. de l'Union interbalkanique, **2** (1938), 77.
3. Sur certains mouvements aléatoires discontinus, Skand. Aktuarie Tidskr, **22** (1939), 211.
4. Sur des mouvements mixtes, C. R., Paris, **210** (1940), 690.
5. Éléments d'une Théorie générale des Chaînes simples constantes de Markoff. Ann. Ec. Norm. Sup. Paris, (3), **57** (1940), 61.

DOEBLIN W. — FORTET R.: 1. Sur deux Notes de M. M. Kryloff et Bogoliouboff, C. R., Paris, **204** (1937), 1699.

DOOB J. L.: 1. Stochastic processes depending on a continuous parameter, Trans. Amer. Math. Soc., **42** (1937), 107.
2. The Brownian movement and stochastic equations, Ann. of Math., **43** (1942), 351.
3. Markoff Chains, denumerable case, Trans. Amer. Math. Soc., **58** (1945), 455.

DOOB J. L. — AMBROSE W.: 1. On two formulations of the theory of stochastic processes depending upon a continuous parameter, Ann. of Math., **41** (1940), 737.

DUBROVSKY V. M.: 1. Ob odnoj krajevoj zadačě těorii věrojatnostěj. Izv. Ak. N. SSSR, Série mathém., **4** (1940), 411.
2. Eine Verallgemeinerung der Theorie der rein unstetigen stochastischen Prozesse von W. Feller, Dokl. Ak. Nauk SSSR, **19** (1938), 439.
3. On purely discontinnous processes with residual effect, ibidem **47** (1945), 79.
4. On a problem connected with purely discontinous random processes, ibidem, **47** (1945), 459.

ELFVING G.: 1. Zur Theorie der Markoff'schen Ketten, Acta Soc. Sc. Fennicae, N. ser. A, T. II, No 8 (1937).
2. Über die Interpolation von Markoffschen Ketten, Commentationes Physico-Math., Helsingfors, X. 3 (1938).
3. Contributions to the theory of integer-valued Markoff processes, Skandin. aktúar. Tids., 1946, p. 175.

FELDHEIM E.: 1. Sur les probabilités en chaîne, Math. Ann., **112** (1936), 775.

FELLER W.: 1. Zur Theorie der stochastischen Prozesse, Math. Ann., **113** (1936), 113.
2. On the Integro-Differential Equations of purely discontinuous Markoff Processes, Trans. Amer. Math. Soc., **48** (1940), 488.
3. On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications, Proceedings of the Berkeley Symposion on math. Statistics, Univ. of California Press, 1949.

FORTET R.: 1. Sur les probabilités en chaîne I, II, III, C. R., Paris, **201** (1935), 184; **202** (1936), 1362; **204** (1937), 315.

2. Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et ses applications à la théorie des probabilités en chaîne, Revista de Ciencias, Lima, No 424, Anno XL (1938).
3. Les fonctions du type de Markoff associèes à certaines équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique, Journ. de math. pures et appliquées, (9), **21** (1943), 177—243.

FORTET R. viz Doeblin W.

FRÉCHET M.: 1. Sur l'allure asymptotique des densités itérées dans le problème des probabilités en chaîne, Bull. Soc. Math., **62** (1934), 68.
2. Sur l'équation fonctionnelle de S. Chapman et sur les problèmes des probabilités en chaîne, Rendic. Acc. Lincei, (6), **20** (1934), 95; 2° sem.
3. Sur l'allure asymptotique de la suite des itérés d'un noyau de Fredholm, The Quart. Journal of Math., **5** (1934), 106.
4. Solution générale de l'équation de Chapman, C. R., Paris, **200** (1935), 369.
5. Sur l'équations fonctionnelle de Chapman et sur le problème des probabilités en chaîne, Proc. of London Math. Soc., (2), **39** (1935), 515.
6. Solution générale de l'équation de Chapman-Kolmogoroff, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (2), **5** (1936), 143.
7. Une expression générale du n[ieme] itéré d'un noyau de Fredholm. en fonction de n, Journ. de mathém., (9), **15** (1936), 151.
8. Sul caso positivamente regolare nel problema delle probabilita concatenate, Giorn. Ist. Ital. Attuari, Anno VII, **28** (1936), 28.
9. Sulla mescolanza delle palline e sulle legge-limite delle probabilita, ibidem Anno VIII (1937), 14.
10. Recherches théoriques modernes sur la Théorie des probabilités, Second livre, Paris, 1938.

GINSBURG G.: 1. O prědělnych zakonach rasprědělěnija v stochastičeskich processach, Zap. naučno issled. Inst. Matěm. i Mech. u Charkovskogo mat. obš., **17** (1940), 65.
2. Sur les conditions suffisantes pour l'unicité des distributions limites, Dokl. Ak. Nauk SSSR, **30** (1941), 295.

HOPF Eberhard: 1. On causality statistics and probability, Journ. of Math. and Physics, **13** (1934), 51.
2. Ergodentheorie, Berlin, 1937.
3. Statistische Probleme und Ergebnisse in der klassischen Mechanik, Actualités sc. et industr., Paris, No 737 (1938).

HOSTINSKÝ B.: 1. Obrácené Markovovy řetězy, Rozpr. Č. Ak., II. tř., XLV, č. 6 (1935).
2. Sur une classe d'équations fonctionnelles, Journ. de math., (9) **16** (1937), 267.
3. Sur les probabilités relatives aux variables aléatoires liées entre elles, Ann. de l'Inst. H. Poincaré, **7** (1937), 69.
4. Résolution d'un probleme général de la théorie de la diffusion, C. R., Paris, **206** (1938), 1452.
5. Sur une équation générale de la Mécanique statistique, ibidem, **207** (1938), 522.
6. Sur une équation fonctionnelle de la Théorie des Probabilités, 3[e] Partie, Spisy vyd. přír. fak. Masarykovy univ., č. 261 (1938).
7. O řešení zobecněné Chapmanovy funkční rovnice, Čas. pro pěst. mat. a fys., **68** (1939), 8.
8. Équations fonctionnelles relatives aux probabilités continues en chaîne, Actualités sc. et ind., Paris, No 782 (1939).
9. Sur le coefficient de corrélation, Sborník Gravé, Kyjev, 1940, p. 48.
10. O pravděpodobnostech změn v soustavě, která se vyvíjí během času, Rozpr. Č. Ak., II. tř., L, č. 26 (1940).
11. Sur les probabilités relatives aux changements dans un système qui évolue an cours du temps, Bull. internat. Ac., Praha 1940.

12. Stacionární posloupnosti veličin závislých na náhodě a Slutského věta o limitním rozdělení podle sinusoidy, Statist. Obzor, **22** (1941), 141.
13. O časovém vývoji souborů, Rozpr. Jednoty pro vědy pojistné, č. 22 (1941).
14. O výpočtu pravděpodobností, které se vztahují k časovému vývoji souborů, Aktuárské vědy, **8** (1949), 61.

HOSTINSKÝ B. — POTOČEK J.: 1. Příspěvek k theorii Markovových řetězů, Rozpr. Č. Ak., II. tř., XLV, č. 20 (1935).
2. Chaînes de Markoff inverses, Bull. internat. Acad., Praha, 1935, 64.

HOSTINSKÝ B., viz VOLTERRA V.

JAGLOM A. M.: 1. Ergodičeskij princip dlja Markovskich processov imějuščich stacionarnoje razprědělěnija, Dokl. Ak. Nauk SSSR, **56** (1947), 347.
2. O statističeskoj obratimosti braunovskogo dviženija, ibidem **56**, (1947), 691.

KAKUTAMI Shizuo: 1. Iteration of linear operations in complex Banach spaces, Proc. Imp. Acad. Jap., **14** (1938), 295.
2. Some results in the operator-Theoretical Treatment of the Markoff Process, ibidem **15** (1939), 260.

KAKUTAMI viz YOSIDA.

KHINTCHINE A.: 1. Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze, Matěmat. Sbornik, Moskva, **2** (44), (1937), 79.

KOLMOGOROV A.: 1. Zufällige Bewegungen, Ann. of Math., (2) **35** (1934), 116.
2. Zur Theorie der Markoffschen Ketten, Math. Ann., **112** (1935) 155.
3. Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze, Math. Ann., **113** (1937), 766.
4. Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen, Matěm. Sbornik, Moskva, **1** (43) (1936), 607.
5. Cěpi Markova so ššetnym čislom rozmožnych sostojanij, Bull. Moskovskogo gos. univ. Sekcija A. T. 1, vyp. 3 (1937).
6. Ein vereinfachter Beweis des Birkhoff-Chintschinschen Ergodensatzes, Matěm. Sbornik, Moskva, n. s. **2** (1937), 367.
7. Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires, C. R., Paris, **201** (1939), 2043.
8. Intěrpolovanije i ekstrapolirovanije stacionarnych slučajnych poslědovatělnostej, Izv. Ak. Nauk SSSR, **5** (1941), 3.

KOSULAJEFF P. A.: 1. Sur les problèmes d'intérpolation et d'extrapolation de suites stationnaires, Dokl. Ak. Nauk SSSR, **30** (1941), 13.

KRUTKOV Jn. A.: 1. O linějnych zadačach těorii brounovskogo dviženija I. II. III., Dokl. Ak. Nauk SSSR, Leningrad, t. I, 479; t. III, 215; t. IV, 120 (1934).

KRYLOV N. — BOGOLJUBOV N.: 1. Sur les propriétés ergodiques de l'équation de Smoluchovsky, Bull. de la Soc. math. de France, **64** (1936), 1—8.
2. Théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire, Annals of Math., **38** (1937), 65.
3. Pro dějako problemi ergodičnoj těorii stochastičnich sistemi, Akad. Nauk URSS, Zapiski katědry matěm. fisiki IV, Kiev, 1939.

LÉVY P.: 1. Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937.
2. Sur certains processus stochastiques homogènes, Compositio math., **7** (1939), 283.
3. Le mouvement brownien plan, Amer. Journ. of Math., **62** (1940), 487.
4. Chaînes doubles de Markoff et fonctions aléatoires de deux variables, C. R., Paris, **226** (1948), 53.
5. Exemples de processus doubles de Markoff, C. R., Paris, **226** (1948), 307.
6. Processus stochastiques et mouvement brownien, Paris, 1948.

LOEVE M.: 1. Sur les fonctions aléatoires stationnaires du second ordre, Revue scientifique, **83** (1946), 297.

MARCINKIEWICZ J.: 1. Sur une propriété du mouvement brownien, Acta Litt. Sc. Szeged, **9** (1939), 77.

MIHOC G., viz ONICESCU O.

ONICESCU O. — MIHOC G.: 1. Sur les chaînes de variables statistiques, Bull. des sc. math., (2) **59** (1935), 174.
2. La dépendance statistique. Chaînes et familles de chaînes discontinues, Actualités sc. et ind., No 503, Paris (1937).
3. Propriétés asymptotiques des chaînes de Markoff étudiées à l'aide de la fonction caractéristique, Mathematica, Cluj, **16** (1940), 13.
PEYOVITCH T.: 1. Contribution à l'étude des solutions asymptotiques des équations différentielles linéaires, Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade, II (1933), 32.
POPOFF C.: 1. Osservazioni sulla teoria della probabilità concatenate di Markoff, Caso di une successione continua di prove, Rendic. Semin. Mat. Univ. Roma, 1942, 82.
POSPÍŠIL B.: 1. Sur un problème de M. M. S. Bernstein et A. Kolmogoroff, Čas. pro pěst. mat. a fys., **65** (1936), 64.
POTOČEK J.: 1. Une remarque sur les chaînes de Markoff, C. R., Paris, **206** (1938), 1536.
2. Difuse a Kolmogorovův pojem zvratnosti, Rozpr. Č. Ak. II. tř., **49** (1939), č. 17.
3. La diffusion et la notion de réversibilité de M. Kolmogoroff, Bull. Internat. Ac., Praha, 1939.
POTOČEK J., viz HOSTINSKÝ B.
ROMANOVSKY V.: 1. Recherches sur les chaînes de Markoff, Acta Math., **66** (1936), 177.
SARYMSAKOV T.: 1. Sur les suites des matrices stochastiques, Dokl. Ak. Nauk SSSR, **47** (1945), 326.
2. Sur les chaînes de Markoff à une infinité dénombrable d'états possibles, ibidem **47** (1945), 617.
3. Sur une synthèse de deux méthodes d'exposer la théorie des chaînes dîscrètes de Markoff, ibidem **48** (1945), 159.
4. Un nouveau critère nécéssaire et suffisant pour la régularité des chaînes de Markoff dont l'ensemble des états possibles est continu, ibidem **49** (1945), 85.
TCHEN CHAN-MOU: 1. Mean Value and Correlation Problems connected with the Motion of Small Particles suspended in a turbulent fluid, The Hague, 1947.
TRUKSA L.: 1. Základy statistické dynamiky, Československá statistická společnost, 1934.
VOLTERRA V. — HOSTINSKÝ B.: 1. Opérations infinitésimales linéaires, Paris, 1937.
YOSIDA K.: 1. Abstract Integral Equations and the Homogeneous Stochastic Process, Proc. Imp. Ac. Jap., **14** (1938), 286.
2. Mean Ergodic Theorem in Banach Spaces, ibidem 292 (1938).
3. Operator-theoretical treatment of Markoff process I, ibidem 363 (1938); II, **15** (1939), 117.
4. Asymptotic Almost periodicities and Ergodic Theorems, ibidem **15** (1939), 252.
5. Ergodic theorems of Birkhoff-Khintchine type, Jap. Journ. of Math., **17** (1940), 31.
6. An Abstract Treatment of the Individual Ergodic Theorem, Proc. Imp. Ac. Jap., **16** (1940).
YOSIDA K. — KAKUTAMI Sh.: 1. Application of mean ergodic theorem to the problem of Markoff process, Proc. Imp. Ac. Jap., **14** (1948), 333.
2. Markoff process with an enumerable infinite number of possible states Jap. Journ. Math., **16** (1939), 47.
3. Operator-Theoretical Treatment of Markoff's process and mean Ergodic Theorem, Ann. of Math., **42** (1941), 188.
WIENER N.: 1. The Ergodic Theorem, Duke Math. Journ., **5** (1939), 1.

*

Revue des travaux publiés en 1935-1948 sur les chaînes de Markoff et problèmes voisins.

BOHUSLAV HOSTINSKÝ, Brno.

Le problème primitif relatif à une chaîne simple de Markoff consiste à étudier les probabilités de passage $P_{ik}^{(n)}$ en fonction des indices i, k et de l'indice d'itération n. Introduisons des variables continues au lieu des indices. Ce changement nous amène à considérer d'abord l'équation de SMOLUCHOWSKI (9a) ou l'équation plus générale de CHAPMAN (9), où Φ est la densité de probabilité de passage. Admettons plus généralement que la probabilité de passage (sur un segment de droite) soit représentée par $\Phi(x, Y, s, t)$, où x est la position initiale (à l'époque s) et où Y désigne une partie du segment considéré; le point se trouve à l'intérieur de Y à l'époque t. Φ satisfait a l'équation (11). POSPÍŠIL a donné en 1935 une première solution de (11) sous la forme d'une série infinie. Il reste à interpréter, au point de vue du Calcul des probabilités, la signification des termes de cette série. La Théorie des chaînes et surtout la recherche des solutions de l'équation (11) doit servir à perfectionner l'expression analytique des lois statistiques qui régissent le développement des systèmes physiques.

ROZVOJ THEORIE NEPARAMETRICKÝCH TESTŮ VE STATISTICKÉ INDUKCI.

JAROSLAV JANKO, Praha.

Při řešení problémů statistické indukce se většinou předpokládalo, že kumulativní distribuční funkce základního souboru závisí známým způsobem na jistých parametrech, jejichž velikost se odhaduje. Tato theorie případu parametrického byla vybudována pracemi R. A. FISHERA, J. NEYMANA, E. PEARSONA, A. WALDA, S. WILKSE a řady dalších badatelů. Byla aplikována na většinu známých frekvenčních funkcí, které se vyskytují v praxi statistické, a její užívání bylo usnadněno množstvím tabulek.

Theorie statistických testů se věnovala v poslední době zvýšenou měrou problémům, kde není možno předpokládati určitou funkční formu rozdělení četností základního souboru, a snažila se podati řešení, které platí pro všechny základní soubory se spojitými kumulativními distribučními funkcemi. Problémy tohoto druhu se nazývají neparametrickými. O jejich řešení chci podati krátký přehled. Jednotné ucelené theorie tu ještě nemáme. Mohu se dotknouti tedy hlavních problémů a jejich řešení obsažených v příslušných pojednáních, na něž odkazuji. Vyčerpávající přehled této theorie do roku 1943 podal SCHEFFÉ (25) s podrobným uvedením literatury.