Jan Mikusiński
Sur le calcul opératoire

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 2, 89--94

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123052`

SUR LE CALCUL OPÉRATOIRE.

JAN G.-MIKUSIŃSKI, Wrocław.

Les origines du *calcul opératoire*, dit aussi *calcul symbolique* ou *calcul de Heaviside*, remontent au commencement du XIX^e siècle, sinon plus tôt. F. GAUSS[1]) discutait l'importance de ce calcul dans une lettre à SCHUMACHER, en le comparant même avec le calcul différentiel, avec le calcul des congruences etc. Or, ce n'est que depuis les travaux de O. HEAVISIDE[2]) qui employait largement le calcul opératoire à des questions pratiques, que date la propagation rapide de ce calcul. Pour illustrer le procédé de HEAVISIDE, considérons d'abord l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x + \lambda x = 1; \tag{1}$$

en posant, pour abréger, $p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ et en traitant p comme symbole algébrique, on aura tout formellement

$$x = \frac{1}{p+\lambda}.$$

On ne voit d'abord aucun avantage d'avoir une telle expression symbolique qui ne dit rien, sauf que x est la solution de (1). Or, considérant l'équation du second ordre

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x + \alpha^2 x = 1, \tag{2}$$

si l'on la résout, pour ainsi dire, de la même manière, on aura

$$x = \frac{1}{p^2+\alpha^2}.$$

Puisque $\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$ est une solution de l'équation (1), on peut admettre généralement que

$$\frac{1}{p+\lambda} = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t});$$

il viendra alors

$$\frac{1}{p^2+\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha i}\left(\frac{1}{p - i\alpha} - \frac{1}{p + i\alpha}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\alpha i}\left[-\frac{1}{i\alpha}(1 - e^{i\alpha t}) - \frac{1}{i\alpha}(1 - e^{-i\alpha})\right] = \frac{1}{\alpha^2}(1 - \cos\alpha t).$$

---

[1]) Voir K. TH. VAHLEN: *Über den Heaviside-Kalkül*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, **13** (1933), 283.

[2]) O. HEAVISIDE: *Operators in mathematical physics*, Proc. Roy. Soc. A. **52** (1893), 504; **54** (1894), 105; Electromagnetic theory, London, 1899.

On peut résoudre d'une manière analogue les équations d'ordre quelconque.

HEAVISIDE appliquait aussi le calcul opératoire à des *équations aux dérivées partielles*.

Considérons par exemple l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} x - \frac{\partial}{\partial t} x = 0;$$

en posant $\dfrac{\partial}{\partial t} = p$, on résout d'abord l'équation soi-disant ordinaire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} x - px = 0,$$

ce qui conduit à la solution formelle

$$x = e^{p\lambda} \,.\, f,$$

où f peut être une fonction quelconque de t. En développant $e^{p\lambda}$ en série, on a ensuite

$$x = \left(1 + \frac{\lambda}{1!} p + \frac{\lambda^2}{2!} p^2 + \dots\right) f = f + \frac{\lambda}{1!} \frac{\partial}{\partial t} f + \frac{\lambda^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f + \dots =$$
$$= f(t + \lambda).$$

Les deux exemples que nous venons de donner pour illustrer la méthode générale, sont très simples et peuvent être aisément résolus par les procédés habituels. L'avantage du calcul de HEAVISIDE ne peut être apprécié que si l'on l'applique à des équations plus compliquées.

HEAVISIDE ne se souciait pas lui-même de la légitimité de ce genre de calcul; il se contentait de parvenir aux résultats corrects, en disant: ,,Vais-je refuser de dîner parce que je ne comprends pas à fond le mécanisme de la digestion?"

Entre 1919 et 1926, il a paru une série de travaux de T. J. BROMWICH[3]) et de J. R. CARSON[4]), qui donnaient au calcul de HEAVISIDE les fondements mathématiques rigoureux. Pour CARSON, le point de départ est dans la transformation

$$X(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} x(t)\, \mathrm{d}t, \tag{3}$$

où p est une *variable complexe*. On considère deux espaces fonctionnels:

---

[3]) T. J. BROMWICH: *Examples of operational methods in mathematical physics*, Phil. Mag., **37** (1919), 407; Symbolical methods in the theory of heat conduction, Proc. Camb. Phil. Soc., **20** (1921), 411.

[4]) J. R. CARSON: *Heaviside operational calculus*, Bell Syst. Tech. Jour., **1**, (1922), 43; **4** (1923), 685; **5** (1926), 50; **5** (1926), 336.

(I) l'espace des fonctions complexes $x(t)$ de variable réelle t, telles que l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-pt}(x)t \, dt$ converge pour certaines valeurs de p;

(II) l'espace des fonctions analytiques $X(p)$ qui est l'image de l'espace précédent par la transformation (3).

La correspondance entre les éléments de ces deux espaces est biunivoque, à mesure nulle près pour les fonctions $x(t)$.

On a par exemple

$$p\int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot 1 \, dt = 1, \quad p\int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot e^{-\lambda t} \, dt = \frac{p}{p+\lambda};$$

les fonctions 1 et $\dfrac{p}{p+\lambda}$ correspondent donc aux fonctions 1 et $e^{-\lambda t}$ respectivement.

Pour résoudre l'équation (1), remarquons que l'on a généralement

$$p\int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \frac{d}{dt} \, x(t) \, dt = p \cdot p \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) \, dt,$$

pourvu que la première intégrale ait un sens et que $f(0)$ soit 0. En transformant l'équation (1) on aura donc

$$pX + \lambda X = 1,$$

d'où

$$X = \frac{1}{p+\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{p}{p+\lambda}\right)$$

et enfin

$$x = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Cet exemple montre que la transformation de Carson conduit au formalisme analogue à celui de Heaviside. Il importe cependant de remarquer que le symbole p a perdu ici son sens primitif de l'opérateur différentiel et n'est qu'une *variable complexe* tout simplement.

En appliquant la transformation (3) aux équations aux dérivées partielles, on les réduira, dans le cas des coefficients constants, aux équations différentielles ordinaires qui sont formellement les mêmes que celles fournies par le procédé de Heaviside. Les solutions des équations transformées sont évidemment les fonctions de l'espace (II); pour avoir les solutions des équations primitives, il faut encore effectuer la transformation inverse à (3). Nous renoncerons d'en donner tous les détails. Notons seulement que, certaines conditions étant remplies, la transformation inverse à (3) peut s'écrire dans la forme

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} X(p) \, \mathrm{d}p. \tag{4}$$

Ce fut justement la formule (4) dont s'est servi BROMWICH pour justifier le calcul de HEAVISIDE, pareillement que la formule (3) a servi à CARSON dans le même but. Au fond, les deux méthodes reviennent au même.

Il est facile de remarquer que le coefficient p dans la formule (3) de CARSON est inutile et que l'on peut, en modifiant légèrement le formalisme, parvenir aux mêmes résultats à l'aide de la *transformation de Laplace*

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) \, \mathrm{d}t,$$

où s est la variable complexe. Il est un grand mérite de G. DOETSCH[5]) d'avoir montré les différentes applications de la transformation de Laplace, non seulement à la résolution des équations différentielles, mais aussi à beaucoup d'autres problèmes. Plusieurs auteurs ont suivi le formalisme de DOETSCH et l'ont exposé dans les livres destinés aux physiciens et aux ingénieurs.

La portée des méthodes de transformations intégrales a largement surpassé ce que ne fournissaient les méthodes expérimentales de HEAVISIDE.

Un défaut de ces méthodes consiste en ce qu'elles rétrécissent le champ des applications à des fonctions qui sont *transformables*. En outre, il est peu commode, au point de vue pratique, d'opérer simultanément avec deux classes de fonctions, ce qui nécessite une double notation.

Les deux difficultés peuvent être écartées, si l'on revient à la conception ancienne d'attribuer aux opérateurs le *sens direct* qui, grâce aux méthodes de l'algèbre moderne et des espaces abstraits, peut être précisé rigoureusement, sans faire appel aux fonctions analytiques.

Désignons par C l'ensemble des fonctions complexes continues $a = \{a(t)\}$[6]) de variable réelle t définies pour $t \geq 0$. Définissons dans C l'addition et la multiplication en posant:

$$a + b = \{a(t)\} + \{b(t)\} = \{a(t) + b(t)\},$$

$$a \,.\, b = \{a(t)\} \,.\, \{b(t)\} = \left\{\int_0^t a(t-\tau) b(\tau) \, \mathrm{d}\tau\right\}.$$

[5]) G. DOETSCH: *Theorie und Anwerdung der Laplace-Transformation*, Berlin, 1937.

[6]) On convient de désigner par a ou par $\{a(t)\}$ les *fonctions*, en réservant le symbole $a(t)$ à leur *valeur* au point t.

Cela posé, on vérifie facilement que C est un anneau commutatif, sans unité. D'après un théorème de E. C. TITCHMARSH[7]) sur le produit de composition $\int_0^t a(t-\tau)b(\tau)\,d\tau$, l'anneau n'a pas de diviseurs de zéro, c'est-à-dire que $ab = 0$ entraîne $a = 0$ ou $b = 0$. Il s'ensuit que l'anneau C peut être immergé dans un corps A.

En pratique, on considère comme éléments de A les fractions $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ et on pose par définition:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ lorsque } ad = bc,$$

$$a = \frac{ak}{k}, \; k \text{ étant un élément non nul fixé arbitrairement.}$$

Cela étant, les éléments du corps A seront dits *opérateurs*.

On peut démontrer que l'ensemble des fonctions localement sommables (c'est-à-dire sommables dans tout intervalle fini) est isomorphe à un sous-ensemble de A. Pareillement, l'ensemble des nombres complexes est isomorphe à un sous-ensemble de A.[8]) Ainsi les fonctions sommables et les nombres complexes deviennent inclus au calcul comme des opérateurs particuliers.

En posant $s = \frac{1}{\{1\}}$, on vérifie facilement que, pour toute fonction dérivable a, on a

$$sa = a_0 + a',$$

où a_0 est la valeur de a au point $t = 0$ et a' est la dérivée de a.

Cette formule permet de réduire aisément les équations différentielles aux coefficients constants aux équations algébriques et conduit au formalisme analogue à celui que fournit la transformation de LAPLACE.

A côté de *l'algèbre* des opérateurs, il est nécessaire d'avoir le no *calcul infinitésimal*. On dit qu'une suite de fonctions a_n de C converge vers $a \in C$ lorsqu'elle converge vers a uniformément dans tout intervalle fini; on étend cette définition d'une manière convenable à des suites d'opérateurs quelconques. Si l'on introduit ensuite la notion de *dérivée*, le calcul devient applicable aux équations aux dérivées partielles et permet non seulement de les résoudre, mais aussi de démontrer l'unicité de leurs solutions.

*

[7]) E. C. TITCHMARSH: *The zeros of certain integral functions*, Proceedings of the London Math. Soc., **25** (1926), 283.

[8]) J. G.-MIKUSIŃSKI: *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica, 11 (1949), p. 41-70.

O rachunku operatorów.

JAN G.-MIKUSIŃSKI, Wrocław.

O. HEAVISIDE rozwiązywał równanie cząstkowe

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}x - \frac{\partial}{\partial t}x = 0,$$

kładąc $\frac{\partial}{\partial t} = p$ i rozwiązując następnie równanie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x - px = 0$$

jako „zwyczajne", co dawało w rezultacie

$$x = e^{p\lambda}f = \left(1 + \frac{\lambda}{1!}p + \frac{\lambda^2}{2!}p^2 + \ldots\right)f = f + \frac{\lambda}{1!}\frac{\partial}{\partial t}f + \frac{\lambda^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t}f \ldots =$$
$$= f(t+\lambda).$$

Podobnie rozwiązywał też równania zwyczajne, nie troszcząc się o matematyczne uzasadnienie wykonywanych działań. Korzyść z tego rodzaju symbolicznego rachunku występuje przy rozwiązywaniu bardziej skomplikowanych równań.

Podstawy matematyczne rachunku HEAVISIDE'a opracowali T. J. BROMWICH, J. R. CARSON i G. DOETSCH, opierając się na następujących transformacjach:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+\infty}\frac{e^{pt}}{p}X(p)\,\mathrm{d}p,\quad X(p) = p\int_0^\infty e^{-pt}x(t)\,\mathrm{d}t \text{ i } X(s) = \int_0^\infty e^{-st}x(t)\,\mathrm{d}t.$$

Rachunek operatorów można też uzasadnić ściśle bez pomocy transformacyj całkowych, korzystając z metod algebry abstrakcyjnej i przestrzeni abstrakcyjnych, przy czym uzyskuje się większą jego ogólność. Rozważa się pierścień funkcyj ciągłych ze zwykłym dodawaniem i z mnożeniem w sensie *splotu* $\int_0^t a(t-\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Po uzupełnieniu tego pierścienia do ciała, otrzymuje się jako nowe elementy funkcje sumowalne, liczby zespolone i ponadto wszystkie operatory HEAVISIDE'A. Wprowadzenie odpowiedniej topologii do ciała operatorów pozwala nietylko na rozwiązywanie równań cząstkowych ale także na dowody ich jednotliwości.