Wladyslaw Ślebodziński

Z zagadnień współczesnej geometrii różniczkowej

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 2, 117--122

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123050`

the distribution function of each system of n variables is equal to the distribution function of the n-variable system obtained by altering the subscripts by one, then

$$\lim s_n(t)/n \text{ exists almost everywhere.} \tag{3}$$

This form of the law of large numbers was expressed by Khintchine in 1937 and later by Doob. It should be noted that this paper does not deal with the authorship of the individual theorems. This would be a difficult task indeed due to the incompleteness of bibliographical reports on research in the theory of probability.

The sequence $\{a_n\}$ is said to be random if its distribution function assumes at least three different values, and if the sequence is independent of the alteration $\{a_{n+k}\}$. If $x_i(t)$ are independent by sets of four, and if they have a common non-trivial distribution function, then the sequence $\{x_i(t)\}$ is random for almost all t.

Z ZAGADNIEŃ WSPÓŁCZESNEJ GEOMETRII RÓŻNICZKOWEJ.

WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI, Wrocław.

Zanim przystąpię do właściwego tematu, muszę uprzedzić, że w referacie swym nie mogę omówić wszystkich współczesnych kierunków badań geometrycznych, pominąć muszę np. tak ważną dziedzinę jak integralna geometria różniczkowa. Ograniczam się do tych kierunków badań, które pozostają w związku z mymi osobistymi zainteresowaniami, a więc przedewszystkim do zagadnień związanych z realizacją erlangeńskiego programu Kleina.

Wiadomo, iż w myśl tego programu zadanie geometrii można sformułować w następujący sposób: mając daną pewną przestrzeń P i operującą w niej grupę przekształceń G — oczywiście grupę w sensie Lie'go, — skonstruować pełny układ niezmienników względem grupy G utworów zawartych w przestrzeni P, jak krzywe, powierzchnie itp. Tak sformułowany program pozwolił nie tylko usystematyzować i sklasyfikować rezultaty badań geometrycznych ubiegłych czasów, ale stał się zarazem wytyczną dla nowych poszukiwań. Ażeby dać pojęcie o płodności idei Kleina, wystarczy przytoczyć takie nowsze gałęzie geometrii jak afiniczna geometria różniczkowa niemieckich geometrów z W. Blaschke na czele, jak geometria grupy Möbiusa, a przede wszystkim różniczkowa geometria rzutowa, dzieło Fubiniego i Čecha. Wprawdzie niektóre niezmienniki różniczkowe krzywych względem grupy rzutowej były znane od wielu lat, skonstruowanie jednolitej i zwartej teorii było jednak wyłączną zasługą tych dwóch geometrów, którzy stworzyli w ten sposób nową, do dzisiejszego dnia żywotną gałęź geometrii. Niektóre interesujące a trudne jej zagadnienia są obecnie przedmiotem badań czeskich geometrów.

Przez pewien czas mogło się zdawać, że geometria przestrzeni RIEMANNA i wszystkie nowe geometrie, które powstały pod wpływem teorii EINSTEINA, jak geometria o koneksji afinicznej, konformicznej, rzutowej, geometria przestrzeni FINSLERA itd., nie mieszczą się w programie KLEINA. Dzięki pracom CARTANA i jego metodzie układu ruchomego wiemy, iż tak nie jest, że każda niemal z tych geometrii odpowiada pewnej skończonej grupie LIE'GO. Okazało się w ten sposób, że do każdej takiej grupy są przyporządkowane dwa rodzaje geometrii, które odróżniamy za pomocą terminów: geometria holonomiczna i nieholonomiczna. Tak np. grupie ruchów euklidesowych odpowiada geometria holonomiczna, będąca zwykłą geometrią euklidesową, i geometria nieholonomiczna, identyczna z geometrią przestrzeni RIEMANNA.

Mimo tych wszystkich tak pięknych i ważnych wyników nie można jednak twierdzić, że program KLEINA został już w głównych zarysach zrealizowany. Wszystkie mianowicie teorie geometryczne, o których poprzednio była mowa, oparte są na skończonych grupach LIE'GO, podczas gdy program mówi ogólnie o grupach ciągłych, które mogą być także nieskończone. Dla żadnej z takich grup nie skonstruowano dotychczas geometrii w formie systematycznej, jednolitej teorii, jak to zrobiono dla różnych grup skończonych. Trudności w rozwinięciu takiej teorii upatrywać należy w fakcie następującym. W geometrii skończonej grupy przekształceń G operujemy stale tzw. układem odniesienia, złożonym ze skończonej liczby elementów tworzących badaną przestrzeń, a więc np. punktów, płaszczyzn, kul, hiperplanów, hipersfer itp. zależnie od rodzaju przestrzeni i od liczby jej wymiarów. Układ odniesienia U powinien być tak skonstruowany, ażeby podgrupa przekształceń grupy G zachowujących układ U redukowała się do przekształcenia tożsamościowego. Jasną jest rzeczą, że w przypadku jakiejkolwiek grupy nieskończonej, a więc np. grupy ogólnej, grupy przekształceń unimodularnych lub stycznościowych, konstrukcja układu odniesienia złożonego ze skończonej liczby elementów tworzących przestrzeń jest niemożliwa. Pojęcie układu odniesienia należy więc rozszerzyć tak, ażeby spełniał sformułowany poprzednio warunek. Środków do osiągnięcia tego celu, przynajmniej w przypadku grupy ogólnej, dostarcza nam geometria tekstylna BLASCHKEGO, którą należy uważać za pierwszy, ważny krok w kierunku rozszerzenia programu KLEINA na grupy nieskończone. Przy sposobności należy wyrazić żal, że geometria tekstylna, która odkryła tak liczne i nieoczekiwane związki między różnymi działami geometrii, nie budzi w ostatnich latach zainteresowania geometrów i że jej ważne i interesujące zagadnienia pozostają nadal nierozwiązane.

Zilustrujemy kilkoma przykładami metodę konstruowania geometrii związanej z nieskończoną grupą LIEGO. Pomyślmy sobie w tym celu pewien obszar D dwuwymiarowej rozciągłości i operującą w nim grupę ogólną G. Pokryjmy następnie obszar D siatką S złożoną z dwu rodzin krzywych. Za pomocą przekształceń grupy G możemy równania tych rodzin sprowadzić do postaci $x = \text{const.}$ i $y = \text{const.}$ Obiektem geometrycznym utworzonym przez siatkę S nie możemy się jeszcze posługiwać jako układem odniesienia w obszarze D, albowiem jest on zachowany przez podgrupę g grupy ogólnej, złożoną z przekształceń postaci $\bar{x} = X(x)$, $\bar{y} = Y(y)$. Jeżeli jednak dołączymy jeszcze trzecią rodzinę krzywych, określoną równaniem $\mathrm{d}y - p(x, y)\,\mathrm{d}x = 0$, w ten sposób, ażeby z poprzednimi rodzinami tworzyła tkaninę w sensie określonym przez Blaschkego, otrzymamy nowy obiekt geometryczny U, który zachowany będzie jedynie przez przekształcenie tożsamościowe; należy tu wyłączyć jedynie przypadek, w którym funkcja $p(x, y)$ ma postać $\Phi(x - y)$, albowiem tkanina byłaby wówczas zachowana przez przekształcenia grupy przekształceń $\bar{x} = x + a$, $\bar{y} = y + b$. Obiekt U nazwiemy układem odniesienia geometrii grupy G w obszarze D. Możemy z nim związać w sposób niezmienniczy trzy formy Pfaffa $\omega^1, \omega^2, \omega$, o zmiennych x, y, spełniające zależności:

$$\mathrm{d}\omega^1 + \omega\omega^1 = 0, \quad \mathrm{d}\omega^2 + \omega\omega^2 = 0.$$

Związki te są jak wiadomo równaniami struktury koneksji afinicznej odpowiadającej grupie liniowej złożonej z przekształceń $\bar{u} = ku + a$, $\bar{v} = kv + b$. Skonstruowaliśmy w ten sposób w obszarze D geometrię odpowiadającą grupie ogólnej G. Element pola w tej geometrii określony jest wyrażeniem $\dfrac{\partial^2 \log p}{\partial x\, \partial y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, a równanie jej geodezyjnych ma postać

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\partial \log p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial \log p}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2.$$

Łatwo stwierdzić, że krzywe tworzące układ U są geodezyjnymi i że stosunek anharmoniczny kierunku dowolnej geodezyjnej z kierunkami krzywych układu U ma we wszystkich jej punktach stałą wartość. Dodajmy jeszcze, że suma kątów trójkąta geodezyjnego wynosi π.

Przedstawiona tutaj metoda pozwala rozwiązać w sposób prosty, wolny od długich rachunków, wiele zagadnień tyczących się potrójnej tkaniny na płaszczyźnie. W szczególności możemy łatwo wyznaczyć jej pełny układ niezmienników różniczkowych. Pierwsze dwa z tych niezmienników otrzymamy wyrażając formę ω za pomocą form ω^1 i ω^2: $\omega = I_1\omega^1 + I_2\omega^2$. Spółczynniki I_1, I_2 w tym wyrażeniu są niezmiennikami trzeciego rzędu tkaniny, albowiem wyrażają się za pomocą pochodnych funkcji p aż do trzeciego rzędu włącznie. Niezmienniki te nie mogą równocześnie znikać; jeżeli jeden z nich, np. I_1, jest równy zeru, wówczas różniczka absolutna krzywizny koneksji afinicznej jest równa zeru wzdłuż linii $\mathrm{d}x = 0$, tj. wzdłuż linii pierwszej z rodzin tkaniny.

W podobny sposób możemy skonstruować geometrię ogólnej grupy przekształceń w przestrzeni. Wystarczy w tym celu utworzyć w pewnym obszarze D tkaninę złożoną z czterech rodzin powierzchni. Za pomocą stosownie dobranego przekształcenia grupy sprowadzamy równania trzech rodzin do postaci $\mathrm{d}x = 0$, $\mathrm{d}y = 0$, $\mathrm{d}z = 0$, a równocześnie zwężamy grupę ogólną do jej podgrupy złożonej z przekształceń postaci

$$\bar{x} = X(x), \ \bar{y} = Y(y), \ \bar{z} = Z(z).$$

Z tkaniną możemy teraz związać w sposób niezmienniczy koneksję afiniczną, której równania struktury mają postać:

$$\mathrm{d}\omega^i + \omega\omega^i = \Omega^i, \ \mathrm{d}\omega = K_{12}\omega^1\omega^2 + K_{23}\omega^2\omega^3 + K_{31}\omega^3\omega^1, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Formy ω^i, ω wyrażają się za pomocą funkcji $p(x, y, z)$ i $q(x, y, z)$ występujących w równaniu czwartej rodziny powierzchni tkaniny: $\mathrm{d}z - p\mathrm{d}x - q\mathrm{d}y = 0$. Otrzymana w ten sposób koneksja odpowiada w schemacie KLEINA-CARTANA czteroparametrowej grupie przekształceń liniowych $\bar{u}^i = ku^i + a^i$; ma ona tę własność, iż jej skręcenie jest równe zeru dla infinitezymalnego cyklu leżącego w elemencie płaskim utworzonym przez styczne do dwóch krzywych przecięcia powierzchni tkaniny. Wektor EINSTEINA tej koneksji jest równy zeru, a spółrzędne K_{ij} jej krzywizny wyrażają się za pomocą spółrzędnych skręcenia $S_{ij}^{\cdot\cdot k}$ i ich pochodnych: $K_{ij} = \nabla_r S_{ij}^{\cdot\cdot r}$. Równania geodezyjnych mają postać

$$\frac{\omega^1}{c^1} = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^3}{c^3},$$

jeżeli symbolami c^i oznaczymy dowolne stałe. Za ich pomocą można okazać, że powierzchnie tkaniny są powierzchniami geodezyjnymi a ich linie przecięcia są geodezyjnymi. I w tym przypadku podobnie jak w poprzednim można wyznaczyć pełny układ niezmienników tkaniny w sposób prostszy niż innymi metodami. Zauważmy jeszcze, że rozważania poprzednie mają zastosowanie także i w tym przypadku, gdy równanie $\mathrm{d}z - p\mathrm{d}x - q\mathrm{d}y = 0$ nie jest równaniem nieograniczenie całkowalnym, gdy zatem przedstawia ono nie rodzinę powierzchni lecz t. zw. rozciągłość PFAFFA. Byłaby to więc uogólniona tkanina złożona z trzech rodzin powierzchni i z rozciągłości PFAFFA. Metoda opisana tutaj zawiera również teorię takiej uogólnionej tkaniny i daje pełny układ jej niezmienników.

Geometrię ogólnej grupy przekształceń w przestrzeni utworzyliśmy konstruując obiekt geometryczny, który zostaje zachowany wyłącznie przez przekształcenie tożsamościowe; obiektem tym była poczwórna tkanina powierzchni odgrywająca tutaj rolę układu odniesienia. Oczywistą jest rzeczą, że w wyborze takiego układu mamy wielką swobodę; możemy się posłużyć tkaniną złożoną np. z trzech kongruencji krzywych lub tkaniną mieszaną złożoną z dwóch rodzin powierzchni i z dwóch kongruencji krzywych. Nadto rodziny powierzchni możemy zastąpić rozciągłościami PFAFFA. Otrzymamy w ten sposób różne geometrie grupy ogólnej, między którymi będą oczywiście zachodziły pewne związki.

Metodę tę możemy zastosować także do innych grup nieskończonych. Tak np. w przypadku grupy przekształceń unimodularnych o dwóch zmiennych x, y, układem odniesienia będzie siatka złożona z dwóch rodzin krzywych na płaszczyźnie. Za pomocą stosownego przekształcenia grupy równania tych rodzin możemy sprowadzić do postaci: $\mathrm{d}x = 0$, $\mathrm{d}y - p(x, y)\mathrm{d}x = 0$. Żądanie, aby pierwsza z tych rodzin była zachowana, zwęża grupę unimodularną do jej podgrupy złożonej z przekształceń

$$\bar{x} = X(x), \; \bar{y} = \frac{y}{X'(x)} + X_1(x).$$

Dołączenie drugiej rodziny pozwala zwęzić tę podgrupę do przekształcenia tożsamościowego, jeżeli wyłączymy przypadek równania liniowego. Z siatką utworzoną przez te dwie rodziny można związać niezmienniczo trzy formy PFAFFA ω^1, ω^2, ω spełniające zależności:

$$\mathrm{d}\omega^1 - \omega\omega^1 = 0, \; \mathrm{d}\omega^2 + \omega\omega^2 = 0.$$

Są one równaniami struktury koneksji afinicznej opartej na grupie

liniowej: $\bar{u} = ku + a$, $\bar{v} = \frac{1}{k} v + b$. Jej krzywizna określona jest

równością $\mathrm{d}\omega = k\omega^1\omega^2$ a równanie geodezyjnych przyjmuje postać

$$\mathrm{d}^2y\mathrm{d}x - \mathrm{d}^2x\mathrm{d}y + (2pp_2 - p_1)\mathrm{d}z^3 - 3p_2\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y = 0$$

$$\left(p_1 = \frac{\partial p}{\partial x}, \; p_2 = \frac{\partial p}{\partial y}\right).$$

W podobny sposób można skonstruować geometrię związaną z grupą przekształceń konformicznych. Najbardziej interesującym i najważniejszym ze względu na zastosowania jest jednak zagadnienie zbudowania geometrii odpowiadającej nieskończonej grupie przekształceń zachowujących zewnętrzną formę różniczkową drugiego stopnia

$$[\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^{n+1}] + [\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^{2n+2}] + \ldots + [\mathrm{d}x^n\mathrm{d}x^{2n}].$$

Geometrię skończonej grupy przekształceń liniowych zachowujących tę formę, czyli grupy symplektycznej, skonstruowali niedawno pp. S. CHERN i H. WANG, przypadek grupy nieskończonej pozostaje jednak nadal zagadnieniem otwartym.

W bliskim związku ze wspomnianymi problemami pozostaje ważne i trudne zagadnienie równoważności dwóch kwadratowych form zewnętrznych postaci

$$\Omega = \tfrac{1}{2}a_{ij}[\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j], \; (i, j = 1, 2, \ldots, 2n)$$

lub równoważne mu zagadnienie geometryzacji takiej formy tj. związania z nią w sposób niezmienniczy pewnej koneksji geometrycznej. Zagadnienie to zostało dotychczas rozwiązane jedynie w najprostszym przypadku ($n = 2$) przez p. YEN CHIH TA. Przypadek $n > 2$ pozostaje nadal zagadnieniem otwartym mimo kilku interesujących przyczynków p. H. CH. LEE.

*

Résumé. — Streszczenie.

Sur quelques problèmes de la géométrie différentielle contemporaine.

WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI, Wrocław.

Pour réaliser le programme d'Erlangen de KLEIN dans le cas d'un groupe infini G, c'est-à-dire pour définir la géométrie d'un tel groupe, il faut, en premier lieu, choisir un repère convenable. Les familles d'objets géométriques qui peuvent servir de repères doivent jouir de la propriété suivante: deux objets de la famille peuvent être transformés l'un dans l'autre par une transformation du groupe G et par une seule.

Considérons par example le cas du groupe général de transformations à trois variables. Comme repère, on peut prendre un réseau (R) formé de quatre familles de surfaces. Au moyen d'une transformation du groupe général on peut réduire les équations de ces familles à la forme suivante:

$$\mathrm{d}x = 0,\ \mathrm{d}y = 0,\ \mathrm{d}z = 0,\ \mathrm{d}z - p\mathrm{d}x - q\mathrm{d}y = 0.$$

Un cas spécial étant exclu, ce réseau n'est invariant que par la transformation identique du groupe général. Au réseau (R), on peut joindre d'une façon invariante une connexion affine dont la structure est définie au moyen des équations

$$\mathrm{d}\omega^i + \omega\omega^i = \Omega^i,\ \mathrm{d}\omega = K_{12}\omega^1\omega^2 + K_{23}\omega^2\omega^3 + K_{31}\omega^3\omega^1.$$

Cette connexion correspond, dans le schéma de KLEIN-CARTAN, au groupe linéaire composé de transformations $\overline{u}^i = ku^i + a^i$; elle nous permet de résoudre plusieurs problèmes liés au réseau (R) et, en particulier, de déterminer le système complet de ses invariants.

Dans le cas du groupe de transformations unimodulaires à deux variables, on peut employer comme repère un système formé de deux familles de courbes, dont les équations peuvent être ramenées à la forme suivante:

$$\mathrm{d}x = 0,\ \mathrm{d}y = p(x, y)\mathrm{d}x.$$

A cet objet géométrique s'attache d'une façon invariante la connexion affine déterminée au moyen des équations

$$\mathrm{d}\omega^1 - \omega\omega^1 = 0,\ \mathrm{d}\omega^2 + \omega\omega^2.$$

La méme méthode peut être appliquée à tout groupe infini.