Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohumil Bečka

O bodech obratu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 1, 10--20

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123031`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1877

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

O bodech obratu.

Podává

B. Bečka,

assistent při c. k. hvězdárně.

V předešlém ročníku p. 169. vyvinuty jsou analytické výrazy vyjadřující podmínky, jakéž platí, má-li míti křivka algebraická body mnohonásobné.

Dříve než tu přikročíme k řešení obdobné úlohy pro křivky n-té třídy, zabývejmež se s dalšími zvláštními body (singularitami) křivek algebraických a tu především s body obratu. Za tím účelem budiž tu nejprvé naší snahou vyvoditi všeobecně platné rovnice přímek tečných v libovolných bodech křivky.

Abychom rovnice tyto vytkli ve formě co možná jednoduché, použijmež pro vztah souřadnic x, y známého nám již označení [1])

$$U_n \equiv a_0 + \sum_{k=1}^{n} (ax + by)^k = 0 . \qquad (1)$$

Prochází-li křivka počátkem souřadnic, jest $a_0 = 0$, a pro tečnu v témž bodě

$$a_1 x + b_1 y = 0 ,$$

a tudíž jest trigonometrická tangenta úhlu α, jejž tvoří tečna s osou úseček

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{a_1}{b_1} .$$

Obdobných vztahů docílíme pro libovolný bod (h_1, h_2) křivky, pošineme-li jen do něho směrem rovnoběžným osy souřadnicové, kladouce

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + h_1 \\ y &= \eta + h_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Substitucí touto promění se rovnice (1) ve

$$\left.\begin{aligned} & a_0 + \sum_1^n M^k \\ & + \xi \sum_1^n k a M^{k-1} + \eta \sum_1^n k b M^{k-1} \\ & + \xi^2 \sum_2^n \binom{k}{2} a^2 M^{k-2} + 2\xi\eta \sum_2^n \binom{k}{2} ab M^{k-2} + \eta^2 \sum_2^n \binom{k}{2} M^{k-2} \\ & + S \end{aligned}\right\} = 0 . \qquad (3)$$

---

*) Viz „Časopis pro pěstování mathem.“ Roč. V. pag. 170.

kdež jest

$$M \equiv ah_1 + bh_2,$$

S pak veškeré ostatní zmocněním povstalé členy vyznačuje.

Položíme-li tu pro krátkost všeobecně

$$\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} a^u b^v M^{k-i} = (ab)_i \tag{4}$$

při čemž

$$u + v = i,$$

a pomníme-li zároveň, že dle (1) dva první členy dají v součtu nullu, an bod $(h_1 h_2)$ křivce přináleží, plyne pro rovnici (3) tvar jednodušší

$$\left.\begin{array}{r} (a)_1 \xi + (b)_1 \eta \\ + (a)_2 \xi^2 + 2(ab)_2 \xi\eta + (b)_2 \eta^2 + S \end{array}\right\} = 0, \tag{3α}$$

z kteréhož jde dle dřívějšího vyšetření pro souřadnice bodů v příslušné tečně

$$(a)_1 \xi + (b)_1 \eta = 0,$$

aneb použijeme-li relace (2), též

$$y - h_2 = -\frac{(a)_1}{(b)_1}(x - h_1) \tag{5α}$$

a pro směrnici tečny

$$tg\,\alpha = \frac{\eta}{\xi} = -\frac{(a)_1}{(b)_1}. \tag{5β}$$

Pro známé rovnice kuželoseček na př.

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

$$y^2 - 2px = 0$$

jsou přímky tečné

$$y - h_2 = \begin{cases} -\dfrac{b^2 h_1}{a^2 h_2}(x - h_1) & \text{pro ellipsu} \\ +\dfrac{b^2 h_1}{a^2 h_2}(x - h_1) & \text{„ hyperbolu} \\ -\dfrac{2p}{h_2}(x - h_1) & \text{„ parabolu.} \end{cases}$$

Abychom pak určili asymptoty křivky, stanovme nejprvé pomocí Hesse-ových souřadnic *) nekonečně vzdálené body z rovnice

$$(ax + by)^n = 0\,,$$

kteráž n hodnot pro poměr $\frac{y}{x}$ poskytuje; jest-li tu pak

$$\frac{y}{x} = \alpha \gtrless \begin{Bmatrix} \infty \\ 0 \end{Bmatrix}$$

přibývá absolutní hodnoty obou souřadnic současně do nekonečna, načež nutno pro asymptoty vyšetřiti jakých hodnot nabývají v rovnici tečné

$$y = -\frac{(a)_1}{(b)_1}\, x + \left(\frac{(a)_1}{(b)_1}\, h_1 + h_2\right)$$

při $x = \infty$ výrazy

$$\frac{(a)_1}{(b)_1}\,,\quad \left\{\frac{(a)_1}{(b)_1}\, h_1 + h_2\right\},$$

při čemž třeba vložiti do nich za y z rovnice první

$$y = \varphi\,(x)\,.$$

Pro kuželosečky

$$2px + qx^2 - y^2 = 0$$

jest

$$\alpha = \pm \sqrt{q}\,,\quad \Big/^{x=\infty} \frac{(a)_1}{(b)_1} = \mp \sqrt{q}$$

$$\Big/^{x=0} \left\{\frac{(a)_1}{(b)_1}\, h_1 + h_2\right\} = \pm \frac{p}{\sqrt{q}}\,.$$

a pro asymptoty

$$y = \pm \sqrt{q}\; x \pm \frac{p}{\sqrt{q}}\,,$$

kterážto rovnice toliko při $q > 0$, tedy pro hyperbolu poskytuje přímky reálné.

Poznámka. Derivujeme-li rovnici U_n podlé x a y, vznikne

$$\frac{\partial U_n}{\partial x} = \sum_1^n ka\, M^{k-1}$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial y} = \sum_1^n kb\, M^{k-1},$$

*) „Viz „Časopisu" ročník II. pag. 161.

z čehož jde, že

$$(a)_1 = \int^{x=h_1\, y=h_2} \frac{\partial U_n}{\partial x}$$

$$(b)_1 = \int^{x=h_1\, y=h_2} \frac{\partial U_n}{\partial y},$$

čímž se rovnice (5α) promění na

$$y - h_2 = \int^{x=h_1\, y=h_2} -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}(x-h_1),$$

jež se v počtu differenciálním jiným spůsobem vyvádí *).

Učinivše tyto poznámky, hleďmež vyšetřiti, za jakými okolnostmi stane se počátek souřadnic bodem obratu a osa úseček tečnou příslušnou. —

Pro lepší vzájemné dohodnutí mějmež na zřeteli definici synthetické geometrie pro body obratu. Táž soudí as tímto spůsobem:

Každá přímka co křivka stupně prvního protíná křivku stupně n-tého v toliktéž — reálných neb imaginárných — bodech m. Sblíží-li se dvé z těchto průseků $m_1\, m_2$ k sobě na vzájem nekonečně mnoho, jest přímka tečnou a protíná křivku v dalších (n—2) bodech; splyne-li pak s dvěma předcházejícími ještě jeden z těchto (n—2) průseků, má tu přímka styk trojbodový a zahrnuje v sobě dvé tečen $m_1\, m_2$, $m_2\, m_3$, o nichž, pokládáme-li křivku co obálku jejich tečen, tvrditi můžeme, že dospěly do polohy své směry opačnými. Bod tento nazývá se *bodem obratu* (bodem inflekčním).

Má-li tedy býti bod počáteční bodem obratu s příslušnou tečnou $y = 0$, musí při této hodnotě $x = 0$ činiti za dost rovnici křivky (1) třikráte, což se vyplní, jest-li

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0,$$

an se tu pro průseky křivky s přímkou $y = 0$ obdrží

$$x^3 \sum_3^n a_k x^{k-3} = 0.$$

*) *Studnička*: „Základové vyšší mathematiky I.“ pag. 162.

Tutéž úvahu rozšířiti lze na libovolný bod $(h_1 h_2)$, neboť pošineme-li osy souřadnicové rovnoběžně v bod ten a pootočíme-li je pak stejným směrem o úhel α osou úseček a tečnou uzavřený, bude, označíme-li běžné souřadnice vzhledem k této nové soustavě ξ, η

$$x = h_1 + \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha$$
$$y = h_2 + \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha,$$

při čemž ovšem pootočení tak provedeno, že osa X s tečnou v jedno splývá.

Podlé rovnice (5β) jest však

$$\cos\alpha = \frac{(b_1)}{\Delta}, \tag{6α}$$

$$\sin\alpha = -\frac{(a)_1}{\Delta}, \tag{6β}$$

kdež položeno pro krátkost

$$\Delta = \sqrt{(a)_1{}^2 + (b)_1{}^2};$$

jest tedy též

$$x = h_1 + \xi \frac{(b)_1}{\Delta} + \eta \frac{(a)_1}{\Delta},$$

$$y = h_2 - \xi \frac{(a)_1}{\Delta} + \eta \cdot \frac{(b)_1}{\Delta},$$

což vloženo do rovnice (1) dává

$$a_0 + \sum_1^n \left\{(ah_1 + bh_2) + \frac{a(b)_1 - b(a)_1}{\Delta}\xi + \frac{a(a)_1 + b(b)_1}{\Delta}\eta\right\}^k = 0.$$

Při skutečném zmocňování třeba tu zvláště míti na zřeteli, že výrazy $(a)_1$ $(b)_1$ jsou skutečnými součiniteli a že tedy nelze na př. psáti

$$a(b)_1 = a \Sigma kb M^{k-1} = \Sigma k ab M^{k-1},$$

což z podstaty celého vyšetřování zřejmě vyplývá.

Umocníme-li tedy, jest též

$$\left.\begin{aligned} & a_0 + \sum_1^n M^k \\ & + \frac{(b)_1 \sum_1^n ka M^{k-1} - (a)_1 \sum_1^n kb M^{k-1}}{\Delta}\xi \\ & + \frac{\sum_2^n \binom{k}{2} M^{k-2}\Big(a(b)_1 - b(a)_1\Big)^2}{\Delta^2}\xi^2 + S \end{aligned}\right\} = 0,$$

kdež S má podobný význam, jakýž mu přiřknut v rovnici (3). Pro bod $(h_1 h_2)$ čili $\xi = \eta = 0$ co bod obratu musí tedy součinitelé při ξ a ξ^2 rovnati se nulle; první podmínka jest tu splněna, ježto jest

$$\frac{(b)_1 \Sigma ka M^{k-1} - (a)_1 \Sigma kb M^{k-1}}{\Delta} = \frac{(b)_1 (a)_1 - (a)_1 (b)_1}{\Delta} = 0;$$

zbývá tedy podmínka druhá

$$\frac{\Sigma \binom{k}{2} M^{k-2} \left(a(b)_1 - b(a)_1 \right)^2}{\Delta^2} = 0,$$

aneb umocníme-li použijíce zároveň označení (4)

$$(a)_2 \frac{(b)_1{}^2}{\Delta^2} + (b)_2 \frac{(a)_1{}^2}{\Delta^2} - 2(ab)_2 \frac{(b)_1}{\Delta} \frac{(a)_1}{\Delta} = 0 \qquad (7)$$

a tudíž podlé rovnice (5β) a (6)

$$(a)_2 + (b)_2 \, tg^2 \alpha + 2(ab)_2 \, tg\, \alpha = 0$$

aneb

$$tg\, \alpha = -\frac{(ab)_2}{(b)_2} \pm \sqrt{\frac{(ab)_2{}^2}{(b)_2{}^2} - \frac{(a)_2}{(b)_2}};$$

poněvadž tu však směrnice má hodnotu toliko jedinou, totiž

$$tg\, \alpha = -\frac{(a)_1}{(b)_1},$$

musí býti

$$\frac{(ab)_2{}^2}{(b)_2{}^2} - \frac{(a)_2}{(b)_2} = 0,$$

a též

$$\frac{(ab)_2}{(b)_2} = \frac{(a)_1}{(b)_1}.$$

Připojíme-li k stejninám těmto rovnici (1), jíž rovněž souřadnice hledaného bodu $h_1 h_2$ zadost činí, a použijeme-li označení v determinantech, zní podmínky pro body obratu

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 \\ -\sum_1^n M^k & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8\alpha)$$

$$\begin{vmatrix} (ab)_2 & (a)_2 \\ (b)_2 & (ab)_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8\beta)$$

$$\begin{vmatrix} (ab)_2 & (a)_1 \\ (b)_2 & (b)_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8\gamma)$$

Zvláštní případ nastane, vyjádřena-li jest křivka rovnicí v tvaru rozvinutém

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + b_1 y = 0 \,.$$

Tehdy jest

$$(ab)_2 = (b)_2 = 0 \,,$$
$$(b)_1 = b_1 \,,$$

a podmínky (8) nepodávají nic určitého; abychom však i v tomto případě rozhodli o bodech obratu, vylučme z relac (8β) a (8γ) veličinu $(b)_2$, čímž se obdrží rovnice

$$\begin{vmatrix} (ab)_2 & (a)_2 \\ (b)_1 & (a)_1 \end{vmatrix} = 0 \,, \qquad (8\delta)$$

z kteréž jde pro tvar rozvinutý

$$(a)_2 \equiv \sum_{2}^{n} \binom{k}{2} a_k x^{k-2} = 0 \,.$$

Při křivce na př.

$$x^4 - 3x^3 + 5x + 2 - y = 0$$

jest

$$(a)_2 = -9x + 6x^2$$

pročež jsou úsečky bodů obratu

$$x_1 = 0 \,, \quad x_2 = {}^3/_2 \,,$$

k nimž přísluší pořadnice

$$y_1 = 2 \,, \quad y_2 = \frac{71}{16} \,.$$

Vhodno jest zde opět stopovati poněkud souvislost podmínek (8) s relacemi, jakéž v počtu differenciálním pro body obratu se uvádějí; methoda, jíž se tu užívá, zakládá se na té poznámce, že v bodech obratu dosahuje směrnice tečny hodnoty největší neb nejmenší. —

Dána-li tedy rovnice křivky v tvaru nerozvinutém (1)

$$\varphi\,(x.y) \equiv U_n = 0 \,,$$

a značíme-li $\binom{u}{v}^{\text{tou}}$ derivaci její podlé $\binom{x}{y}$ všeobecně φ_{uv}, je pro nejmenší neb největší směrnici

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\,d\,\frac{\varphi_{10}}{\varphi_{01}} = 0 \,,$$

aneb podlé známých pravidel

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{10}\,\varphi_{11}-\varphi_{20}\,\varphi_{01}&=0\\ \varphi_{11}\,\varphi_{01}-\varphi_{02}\,\varphi_{10}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

a vyloučí-li se tu poměr $\dfrac{\varphi_{10}}{\varphi_{01}}$, též

$$\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{20}\\ \varphi_{02} & \varphi_{11}\end{vmatrix}=0 \qquad (9\alpha)$$

ku kteréžto podmínce třeba připojiti jednu z rovnic (9) na př. druhou

$$\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{10}\\ \varphi_{02} & \varphi_{01}\end{vmatrix}=0; \qquad (9\beta)$$

avšak jest, jak se pomocí označení (1) a skutečným derivováním rovnice (1) snadno lze přesvědčiti,

$$\Big/_{x=h_1\;y=h_2}\;\varphi_{u,v}=i!\,(ab)_{uv}, \qquad (9\gamma)$$

čímž totožnost podmínek (9) s (8) zřejmě jest vytknuta.

Dodatek. Vyvinuvše spůsobem elementárním všeobecnou rovnici (5α) pro tečné křivky, naznačíme na konec stručně, jak lze pomocí zde zavedeného označení vyšetřiti maxima a minima algebraických funkcí tvaru (1).

Abychom určili, pro které hodnoty proměnné x v rovnici algebraické

$$a_0+\sum_1^n(ax+by)^k=0 \qquad (10)$$

nabude y hodnoty největší neb nejmenší, považujmež ji opět za rovnici křivky U_n. V hledaných bodech, v nichž dostoupí y maxima neb minima, stane se tu pak tečna rovnoběžnou k ose úseček, což vyjádřeno jest podmínkou

$$tg\,\alpha=-\frac{(a)_1}{(b)_1}=0,$$

aneb

$$(a)_1=0. \qquad (10\alpha)$$

Které z hodnot pro $y=h_2$ rovnic (10) a (10α) plynoucích jsou maximální, rozhodne se dle označení hodnot pořadnic sousedních, čehož kriterium podává rovnice (3β); neboť pro body bodům ($h_1\,h_2$) aneb $\xi=\eta=0$ velmi blízké lze voliti ξ tak malé, aby o η rozhodly členy

$$(a)_1\,\xi+(a)_2\,\xi^2,$$

takže možno položiti, ježto má býti $(a)_1 = 0$,

$$(b)_1 \eta + (a)_2 \xi^2 = 0$$

aneb

$$\eta = -\frac{(a)_2}{(b)_1} \xi^2.$$

Jest-li tu η $\begin{Bmatrix} \text{kladné} \\ \text{záporné} \end{Bmatrix}$, tedy

$$\frac{(a)_2}{(b)_1} \lessgtr 0, \tag{11}$$

$\begin{Bmatrix} \text{přibývá} \\ \text{ubývá} \end{Bmatrix}$ v sousedním bodě pořadnice, a y stává se v $(h_1 h_2)$ $\begin{Bmatrix} \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{Bmatrix}$.

Pro funkce rozvinuté

$$y = a_0 + \sum_1^n a_k x^k$$

jest $(b)_1 = -1$, a podmínky (11) zní

$$(a)_2 > 0, \text{ pro minimum,}$$
$$(a)_2 < 0 \text{ pro maximum;}$$

pro funkci na př. [1])

$$y^3 - 3xy^2 + 3yx^2 - x^3 + x + 6 = 0$$

jest pro největší neb nejmenší y

$$(a)_1 \equiv 1 - 3h_1{}^2 + 6 h_1 h_2 - 3h_2{}^2 = 0,$$

kterážto rovnice poskytuje ve spojení s předcházející

$$x_1 = -6 - \frac{1}{3\sqrt{3}}$$
$$y_1 = -6 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ maximum},$$
$$x_2 = -6 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$$
$$y_2 = -6 - \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ minimum.}$$

Poněvadž se vyšetřování funkcí stupně 3-tího a 4-tého velmi často naskytuje, udáni jsou na připojené tabulce potřební součinitelé, aby se při praktickém provádění příkladů vždy zvlášť sestrojovati nemusili. —

*) Pro kontrolu viz ibidem pag. 102.

Pro cvičení se v symbolice zde užívané buďtež tu podány laskavému čtenáři následující úkoly:

Má se vyvinouti na základě rovnice (3) a (9γ) theorie poučky Taylorovy, Maclaurinovy a Bernoulli-ho pro funkce o dvou proměnných vůbec a jedné proměnné zvlášť. —

2. Mají se přímo z rovnice (3α) odvoditi podmínky pro body obratu.

3. Má se poukázati k souvislosti podmínek (11) a (8δ) a vyložiti geometrický význam souvislosti této.

4. Mají se nalézti délky tečny, normály, subtangenty a subnormály v libovolném bodě křivky algebraické.

5. Má se vyšetřiti, zdaž mezi křivkami vytknutými rovnicí s proměnným parametrem v,

$$y = vx^4 - 2v^2x - 4x^3 - 2$$

jest obsažena křivka taková, při níž směrnice tečny v bodě $x = 1$, jest minimum.

---

*) Na str. 12. ř. 5. shora zůstala nedopatřením revisorovým chyba státi; nutno psáti

$$\frac{y}{x} = \alpha \gtrless 0 \text{ aneb } \frac{y}{x} < \infty .$$

pro $n = 4$

součinitel	při funkcích nerozvinutých tvaru (10) rovná se výrazu
$(a)_1$	$a_1+2a_2h_1+2(a_1b_1)h_2+3a_3h_1^2+6(a_2b_1)h_1h_2+3(a_1b_2)h_2^2+4a_4h_1^3+12(a_3b_1)h_1^2h_2+12(a_2b_2)h_1h_2^2+4(a_1b_3)h_2^3$
$(b)_1$	$b_1+2b_2h_2+2(a_1b_1)h_1+3b_3h_2^2+6(a_1b_2)h_1h_2+3(a_2b_1)h_1^2+4b_4h_2^3+12(a_1b_3)h_2^2h_1+12(a_2b_2)h_2h_1^2+4(a_3b_1)h_1^3$
$(ab)_2$	$(a_1b_1)+3(a_2b_1)h_1+3(a_1b_2)h_2+6(a_3b_1)h_1+12(a_2b_2)h_1h_2+6(a_1b_3)h_2^2$
$(a)_2$	$a_2 \quad +3a_3h_1+3(a_2b_1)h_2+6a_4h_1^2+12(a_3b_1)h_1h_2+6(a_2b_2)h_2^2$
$(b)_2$	$b_2 \quad +3b_3h_2+3(a_1b_2)h_1+6b_4h_2^2+12(a_1b_3)h_1h_2+6(a_2b_2)h_1^2$
součinitel	**při funkcích rozvinutých tvaru (11) rovná se výrazu**
$(a)_1$	$a_1+2a_2h_1+3a_3h_1^2+4a_4h_1^3$
$(b)_1$	-1
$(ab)_2$	0
$(a)_2$	$a_2+3a_3h_1+6a_4h_1^2$
$(b)_2$	$0.$