Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

Poznámka k analytické geometrii

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 1, 35--40

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123029

Poznámka k analytické geometrii.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

V našich knihách učebních, podle nichž se vykládá analytická geometrie, obyčejně se přestává na tom, že se všeobecně provede rozbor rovnice stupně druhého a ukáže, jak se která kuželosečka tu zračí (a v mnohých není ani tento povšechný rozhled obsažen). Zapomíná se tu obyčejně na výminky, v nichž rovnice stupně druhého nevyznačuje útvar stupně druhého, nýbrž dva útvary stupně nižšího, aneb v nichž kuželosečky se snižují či degenerují na soustavu dvou přímek atd. Aby se tato mezera vyplnila, jest účelem těchto řádků, věnovaných našim studujícím.

Značí-li

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad \ldots, \quad L_n = 0$$

rovnice rozmanitých křivek L_1, L_2, ..., L_n, bude součin

$$L_1 L_2 \ldots L_n \equiv L = 0$$

značiti soubor těchto křivek; neb rovnici této vyhovují všechny souřadnice, které jednotlivé rovnice předcházející uvádějí na 0. A naopak, rozložíme-li rovnici

$$L = 0$$

co do levé strany v součin, takže

$$L \equiv L_1 . L_2 \ldots . L_n = 0 ,$$

bude o sobě, jak patrno, též

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad \ldots, \quad L_n = 0$$

a tudíž bude rovnice předešlá obsahovati všechny křivky těmito jednotlivými rovnicemi vyjádřené.

Stejnoměrná rovnice stupně n-tého mezi dvěma proměnnými představuje nám tudíž n přímek procházejících počátečním bodem souřadnic.

Neb převedeme-li rovnici tuto

$$x^n - px^{n-1} y + qx^{n-2} y^2 - \ldots \pm ty^n = 0$$

dělením na tvar

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n - p\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + q\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} - \ldots \pm t = 0,$$

poznáváme, že tu řešením možná si zjednati n kořenů

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ l$$

a tudíž levou stranu rovnice proměniti v součin

$$\left(\frac{x}{y}-a\right)\left(\frac{x}{y}-b\right)\ldots\left(\frac{x}{y}-l\right)$$

a rovnici samé odstraněním jmenovatele dáti tvar

$$(x-ay)(x-by)\ldots(x-ly)=0,$$

jemuž se vyhoví, jestli

$$x-ay=0,\ x-by=0,\ \ldots,\ x-ly=0,$$

čímž vyznačena jest soustava n přímek bodem (0, 0) procházejících.

Podlé toho značí na př. rovnice

$$x^2-15\,xy+56\,y^2=0,$$

již možná patrně převésti na tvar

$$(x-7y)\ (x-8y)=0$$

soustavu dvou přímek reálných, jichž rovnice jsou

$$x-7y=0,\ x-8y=0.$$

Rovnice stupně druhého

$$x^2+y^2=0$$

může se převésti na tvar

$$(x+yi)\ (x-yi)=0$$

a značí tudíž soustavu dvou přímek imaginárních.

Rovnici stupně třetího

$$x^3-6x^2y+11\,xy^2-6\,y^3=0$$

možno dáti tvar

$$(x-y)\ (x-2y)\ (x-3y)=0,$$

z čehož patrno, že vyznačuje soustavu tří přímek a t. p.

Máme-li tedy všeobecně rovnici stupně druhého tvaru

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0, \tag{1}$$

aneb odstraníme-li součinitele prvního dělením, tvaru

$$x^2-pxy+qy^2=0, \tag{2}$$

při čemž značí, jak patrno,

$$p=-\frac{B}{A},\quad q=\frac{C}{A},$$

obdržíme z rovnice (2) napřed dělením

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-p\,\frac{x}{y}+q=0$$

a na to řešením

$$\frac{x}{y}=\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q},$$

takže značí-li

$$a=\frac{1}{2}\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right),$$

$$b=\frac{1}{2}\left(p-\sqrt{p^2-4q}\right),$$

rovnice (2) se promění v

$$(x-ay)\,(x-by)=0,$$

z čehož jde na jevo, že tu obsaženy jsou přímky

$$x-ay=0,\quad x-by=0. \tag{3}$$

Přímky tyto jsou *reálné* a *nestejné,* pokud a a b jsou kořeny reálné a nestejné aneb pokud

$$p^2-4q>0;$$

přímky tyto splynou v *jednu,* platí-li

$$a=b,$$

aneb což jest totéž, jestli

$$p^2-4q=0;$$

přímky tyto jsou *imaginární,* jakmile a a tudíž i b jest veličina soujemná aneb jakmile se stane

$$p^2-4q<0.$$

Máme-li na zřeteli tvar (1), tedy tu rozhoduje podmínka

$$B^2-4AC\gtreqless 0.$$

Abychom určili úhel ε, jejž přímky (3) uzavírají, použijme známého vzorce, načež snadno obdržíme

$$tg\,\varepsilon=\frac{a-b}{1+ab},$$

aneb zavedeme-li hodnoty z rovnice kvadratické plynoucí,

$$tg\,\varepsilon=\frac{\sqrt{p^2-4q}}{1+q} \tag{4}$$

pro tvar (2) aneb

$$tg\,\varepsilon=\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{A+C} \tag{5}$$

pro tvar (1), z čehož patrno, že přímky tyto stojí na sobě kolmo, platí-li

$$1+q=0 \text{ neb } A+C=0.$$

Máme-li tedy na př. rovnici

$$x^2 + xy - 6y^2 = 0,$$

tož patrno, že obsahuje přímky

$$x - 2y = 0, \quad x + 3y = 0,$$

kteréž uzavírají úhel ε, o němž platí

$$tg\,\varepsilon = \frac{\sqrt{1 + 4.6}}{-5} = -1$$

a který tudíž měří 45° (vedlejší 135°).

Abychom ustanovili rovnici přímky půlící úhel, jejž uzavírají přímky rovnicí (1) neb (2) dané, považme, že úhel γ, jejž půlící přímka uzavírá s osou úseček, vyjádří se pomocí úhlů α, β, jež uzavírají dvě přímky dané s toutéž osou, vzorcem

$$2\gamma = \alpha + \beta,$$

z čehož pak jde především

$$tg\,2\gamma = tg\,(\alpha + \beta)$$

a položíme-li

$$tg\,\gamma = \mu$$

a použijeme-li známých hodnot pro $tg\,\alpha$ a $tg\,\beta$,

$$\frac{2\mu}{1 - \mu^2} = \frac{a + b}{1 - ab};$$

řešíme-li tuto rovnici podle μ, bude pak

$$\mu^2 + \frac{2\,(1 - ab)}{a + b}\,\mu - 1 = 0, \tag{6}$$

aneb dosadíme-li za

$$a + b = -\frac{B}{A}, \quad ab = \frac{C}{A}, \tag{7}$$

$$\mu^2 - 2\,\frac{A - C}{B}\,\mu - 1 = 0 \tag{8}$$

kvadratickou rovnicí, z níž patrno, že pro μ se obdrží *dvě* hodnoty, z nichž první platí pro půlící přímku jednu, druhá pak pro přímku půlící úhel vedlejší, dále pak, že

$$q = -1,$$

že tedy půlící přímky tyto stojí *kolmo* na sobě, jakž i bylo očekávati.

Poněvadž z této rovnice jde

$$\mu = -\frac{1 - ab \pm \sqrt{1 + a^2 + b^2 + a^2b^2}}{a + b}$$

a i součet $a+b$ i součin ab jest podlé vzorce (8) veličina reálná, tož patrno, že půlící přímky tyto jsou *vždy reálné* i pro ten případ, že patří k soustavě dvou přímek imaginárních.

Zavedeme-li pak do rovnice (8) za μ hodnotu příslušnou $\frac{x}{y}$, povstane z ní konečně

$$x^2 - 2\frac{A-C}{B}xy - y^2 = 0 \qquad (9)$$

co rovnice obou půlících přímek.

Abychom konečně rozhodli všeobecně, kdy rovnice druhého stupně

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \qquad (10)$$

vyjadřuje soustavu dvou přímek, uveďme ji napřed na tvar

$$ax^2 + 2(by+d)x + cy^2 + 2ey + f = 0,$$

načež obdržíme řešením podlé x

$$ax = -(by+d) \pm \sqrt{(b^2-ac)y^2 + 2(bd-ae)y + d^2 - af},$$

z čehož patrno, že tu povstane tvar rovnice přímky

$$x = my + n,$$

jestli veličina pod znamením odmocnění úplným čtvercem; a podmínce této se vyhoví, jestli, jak známo,

$$(b^2-ac)(d^2-af) = (bd-ae)^2,$$

což možná i vyjadřiti, rozvine-li se, podmínkou

$$acf + 2bde - ae^2 - cd^2 - fb^2 = 0 \qquad (11)$$

aneb použijeme-li tvaru determinantu souměrného, podmínkou

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

Chceme-li na př. b tak určiti, aby rovnice

$$x^2 + 2bxy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$$

vyjadřovala soustavu dvou přímek, zaveďme do předešlé podmínky vzorcem (11) vytknuté

$$a=1,\quad c=1,\quad d=-\frac{5}{2},\; e=-\frac{7}{2},\; f=6,$$

načež obdržíme kvadratickou rovnici

$$b^2 - \frac{35}{12}b + \frac{25}{12} = 0,$$

z níž plynou řešením dvě hodnoty a sice

$$b_1 = \frac{5}{3}, \quad b_2 = \frac{5}{4}, ^{*)}$$

kteréž vedou k dvěma přímkám.

Oko redukované.

Sepsal

prof. **V. Baudys.**

Oko lidské představuje nám soustavu tří kulových ústředí rozličné lomnosti; jest to mok vodnatý (humor aqueus), čočka krystalová, a mok skelný (humor vitreus), které bezprostředně k sobě přiléhají a sice tak, že mok vodnatý jest omezen z předu průhlednou rohovkou tvaru kulového, vzadu přední plochou čočky krystalové; za čočkou bezprostředně nalezá se mok skelný a zadní zakroužení čočky jest zároveň rozhraním jeho.

Podle měření Listinga, které také prof. Helmholz za správné shledává, jsou pro normální oko tyto průměrné hodnoty:

1. Udavatel lomu ze vzduchu do moku vodního:

$$n = \frac{103}{77} \doteq 1{\cdot}34$$

2. Udavatel lomu ze vzduchu do čočky krystalové:

$$n_1 = \frac{16}{11} \doteq 1{\cdot}45 .$$

Poznačíme-li n' relativního udavatele lomu z moku vodnatého do čočky, bude podle známé relace:

$$n' = \frac{n_1}{n} \doteq 1{\cdot}088 .$$

3. Udavatel lomu ze vzduchu do moku skelného:

$$n_2 = \frac{103}{77} .$$

---

*) Porovnej *Salmon* „Analytische Geometrie der Kegelschnitte“ II. Aufl. pag. 110.