František Hoza

Příspěvek k theorii podřízených determinantů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 1, 21--34

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123028

Příspěvek k theorii podřízených determinantů.*)

Podává

prof. F. **Hoza**.

1. Jak známo, lze každý determinant n-tého stupně rozložiti v částečné součiny dvou a dvou podřízených determinantů, z nichž jeden jest vždy k-tého a druhý $(n-k)$-tého stupně. Na př.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \\
- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}
&+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \\
- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} \\ a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}
&+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{vmatrix} \\
&- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \\
+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}
&- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{34} & a_{35} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{vmatrix} .
\end{aligned}
$$

---

*) Viz: Dr. *F. J. Studnička* „O determinantech“. V Praze 1870 str. 16. aneb *Günther* „Lehrbuch der Determinantentheorie“, Erlangen 1875 str. 45.

Aneb užijeme-li označení podobného onomu, jež zavedl Sylvester, píšíce přípony sloupcové nad přípony řádkové, obdržíme

$$\begin{vmatrix}12345\\12345\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}123\\123\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}45\\45\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}123\\124\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}45\\35\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}123\\125\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}45\\34\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}123\\134\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}45\\25\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}123\\135\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}45\\24\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}123\\145\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}45\\23\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}123\\234\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}45\\15\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}123\\235\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}45\\14\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}123\\245\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}45\\13\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}123\\345\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}45\\12\end{vmatrix}.$$

Kterýkoliv částečný součin utvoříme, sestavíme-li přípony sloupcové v pořádku přirozeném dávajíce do prvé skupeniny k předních a do druhé $(n-k)$ ostatních přípon. Nápotom kombinujeme přípony řádkové z čísel $1, 2, 3, \ldots n$ tak, aby v prvém činiteli stála vždy kombinace k-té a v druhém $(n-k)$-té třídy. Množství všech částečných součinů bude

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

Znaménka jejich budou dílem $(+)$ a dílem $(-)$ dle toho, tvoří-li přípony řádkové buď sudé aneb liché množství převratů čili inversí.

V každém případě dlužno oba podřízené determinanty, jejichž přípony v uvedeném pořádku postupují, dříve napsati, než lze množství převratů stanoviti. Mnohdy však jdou přípony za sebou v jiném pořádku. Nápotom nezbývá nic jiného, než napsati vedle sebe tak zvané příčky čili členy hlavní obou podřízených determinantů, srovnati prvky jejich dle přípon prvých a sečísti převraty v příponách druhých. Pokusíme se v následujednání podati návod, kterak lze pouze z přípon jediného z obou podřízených determinantů určiti znaménko částečného součinu co funkci přípon sloupcových i řádkových. Methoda naše, pokud nám známo, jest zcela nová a, jak doufáme, pro další vývin této theorie dosti důležitá.

2. Budiž dán determinant n-tého stupně

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\,2\,3\,\ldots\,n\\1\,2\,3\,\ldots\,n\end{vmatrix}. \tag{1}$$

Pozorujme libovolný prvek a_{pq} náležící ku p-tému řádku a q-tému sloupci. Rozvineme-li determinant Δ_n dle prvků p-tého řádku aneb q-tého sloupce, obdržíme, jak známo,

$$\Delta_n = \Sigma\,(-1)^{p+q}\,.\,a_{pq}\,.\,\Delta_{n-1}\,, \tag{2}$$

kdež Δ_{n-1} značí podřízený determinant prvého řádu, jenž z determinantu Δ_n povstane, když v tomto vynecháme p-tý řádek a q-tý sloupec.

Determinant Δ_{n-1} jest $(n-1)$-ního stupně. Znaménko Σ značí součet všech takových částečných součinů, v nichž buď p konstantní a q variabní, rovné $1, 2, 3, \ldots n$, aneb naopak q konstantní a p variabní.

Množství částečných součinů bude n. Znaménko každého z nich řídí se dle mocniny $(-1)^{p+q}$, jejíž mocnitel udává, kolika řádky a sloupcemi musíme projíti, než od prvého prvku a_{11} dojdeme k prvku a_{pq}. Je-li toto množství číslem sudým, sluší dáti znaménko $(+)$, je-li však lichým, náleží $(-)$.

3. Podobným pochodem lze též podřízený determinant Δ_{n-1} vyvinouti v částečné součiny. K tomu cíli pozorujme libovolný prvek a_{rs} determinantu Δ_n a ustanovme, v kolikátém řádku a sloupci determinantu Δ_{n-1} se nalezá. Je-li $p > r$, tu vynechání p-tého řádku nezměnilo posici r-tého řádku. Avšak kdyby $p < r$ bylo, tu by prvek a_{rs} v determinantu Δ_{n-1} byl v $(r-1)$-ním řádku. Rovněž tak má se věc co do sloupců. Z toho patrno, že tvoří-li čísla $p\,r$ *postup,* t. j. následují-li za sebou v pořádku přirozeném, (opak slove převratem čili inversí) musíme od původního množství řádků odečíst jednotku. Totéž platí o příponách qs vzhledem k sloupcům.

Označíme-li tedy písmenem α množství postupů v obou sestavách pr a qs obsažených, bude

$$\Delta_{n-1} = \Sigma\,(-1)^{r+s-\alpha}\,.\,a_{rs}\,.\,\Delta_{n-2}. \tag{3}$$

Zde znamená Δ_{n-2} podřízený determinant druhého řádu, jenž z determinantu Δ_{n-1} povstane, když v tomto vynecháme ony řady (řádky i sloupce), v nichž se prvek a_{rs} nalezá.

Též z původního determinantu Δ_n lze jej utvořiti vynecháním oněch řad, v nichž se prvky a_{pq}, a_{rs} nalezají. Determinant Δ_{n-2} jest $(n-2)$-ého stupně.

4. Jsou-li a_{pq}, a_{rs} dva určité avšak libovolné prvky z různých řad determinantu Δ_n vzaté a tážeme-li se po součtu všech členů vyvinutého determinantu Δ_n, jež tyto prvky mezi svými činitely obsahují, bude žádaný součet

$$S_2 = (-1)^{m_2}.\, a_{pq}\, a_{rs}\, \Delta_{n-2}\,, \tag{4}$$

kdež

$$m_2 = p + q + r + s - \alpha\,.$$

Na př. má-li se určiti součet oněch členův vyvinutého determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{25} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{51} & a_{52} & \dots & a_{55} \end{vmatrix},$$

jež obsahují prvky $a_{32}\, a_{45}$, bude

$$S_2 = (-1)^{12}\, a_{32}\, a_{45} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

Určíme-li součet oněch členův, jež obsahují prvky a_{33}, a_{51}, obdržíme

$$S_2' = (-1)^{11}\, a_{33}\, a_{51} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

5. Namítá se nyní otázka, kolik takovýchto částečných součinů jest vůbec možných. Odpověď zní:

Tolik, kolikrát lze $a_{pq} . a_{rs}$ tak utvořiti, aby p se různilo od r a též q od s. Při tom se mohou p, q aneb r, s vzájemně rovnati.

Z prvků $1, 2, 3, \dots n$ máme $\binom{n}{2}$ kombinac druhé třídy pro p, r i q, s. Avšak všecky kombinace jeděnch přípon, na př. p, r, lze též převrátiti. Pročež bude žádané množství

$$2 \binom{n}{2}^2.$$

Jelikož vyvinutý determinant Δ_{n-2} má $(n-2)!$ členův, obdržíme celkem množství členů

$$2\binom{n}{2}^2 (n-2)! = \binom{n}{2} n!,$$

t. j. takovým spůsobem obdržíme $\binom{n}{2}$-krát více členův, než jich má determinant Δ_n, pročež se musí při tom $\binom{n}{2}$ stejných členův opakovati. Již z toho vyplývá, že lze determinant Δ_n rozložiti $\binom{n}{2}$-ma spůsoby v částečné součiny tvaru (4). Necháme-li totiž buď p, r stálými a q, s proměnlivými, aneb naopak, obdržíme vždy $2\binom{n}{2}$ součinův tvaru (4), neb q, s mohou nejprvé jíti v pořádku přirozeném a napotom v opačném a násobíme-li vždy determinantem Δ_{n-2}, obdržíme

$$q\binom{n}{2}(n-2)! = n!$$

různých členův, z nichž každý skládá se z činitelův z různých řad determinantu Δ_n vzatých, t. j. obdržíme tento determinant vyvinutý. Při tom mohou konstantní přípony $\binom{n}{2}$-ma spůsoby se kombinovati z čísel $1, 2, 3, \ldots n$. Tudíž lze determinant Δ_n, jak nahoře již podotknuto, $\binom{n}{2}$-ma spůsoby v částečné součiny tvaru (4) rozvésti.

6. Jsou-li přípony p, r konstantní, lze dvě a dvě hodnoty součinu

$$(-1)^{m_2} . a_{pq}\, a_{rs}\, \Delta_{n-2},$$

jež se liší pouze pořádkem přípon q, s a tudíž i znaménkem sloučiti v jeden, čímž obdržíme

$$T_2 = (-1)^{m_2} . \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} \\ a_{rq} & a_{rs} \end{vmatrix} . \Delta_{n-2} = (-1)^{m_2} . \begin{vmatrix} q & s \\ p & r \end{vmatrix} . \Delta_{n-2} . \qquad (5)$$

Totéž platí pro případ konstantních přípon q, s.

Tudíž lze každý determinant Δ_n rozložiti v $\binom{n}{2}$ částečných součinů tvaru (5), z nichž v každém přichází determinant druhého stupně s determinantem $(n-2)$-ého stupně.

Tento rozklad lze $\binom{n}{2}$-ma spůsoby provésti, kombinují-li se konstantní přípony. Na př.

$$\begin{vmatrix}1234\\1234\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}12\\24\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}34\\13\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}13\\24\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}24\\13\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}14\\24\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}23\\13\end{vmatrix}$$
$$-\begin{vmatrix}23\\24\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}14\\13\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}24\\24\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}13\\13\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}34\\24\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}12\\13\end{vmatrix}.$$

Aneb

$$\begin{vmatrix}1234\\1234\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}12\\23\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}34\\14\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}13\\23\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}24\\14\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}14\\23\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}23\\14\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}23\\23\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}14\\14\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}24\\23\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}13\\14\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}34\\23\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}12\\14\end{vmatrix}.$$

Aneb

$$\begin{vmatrix}1234\\1234\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}23\\12\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}14\\34\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}23\\13\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}14\\24\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}23\\14\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}14\\23\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}23\\23\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}14\\14\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}23\\24\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}14\\13\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}23\\34\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}14\\12\end{vmatrix}.$$

Podobných rozkladů bylo by $\binom{4}{2} = 6$.

Z příkladu uvedeného vysvitá, jak důležité jest naše pravidlo o znaménku částečného součinu, jelikož plyne ze součtu přípon prvého determinantu. Zároveň dlužno poznamenati, že totéž znaménko plyne také z přípon druhého determinantu.

7. Obmezíme-li se při rozkladu determinantu na takové spůsoby, v nichž přípony p, r a q, s následují za sebou v pořádku přirozeném, bude vždy

$$\alpha = 2$$

a tudíž

$$m_2 = i_2 = p + q + r + s\,,$$

pročež

$$\Delta_n = \Sigma\,(-1)^{i_2}.\begin{vmatrix}q & s\\p & r\end{vmatrix}.\Delta_{n-2}\,. \tag{6}$$

Z tohoto vzorce patrno, co jsme hned zpočátku naznačili, že znaménko částečného součinu závisí pouze od součtu přípon prvého determinantu $\begin{vmatrix}q & s\\p & r\end{vmatrix}$.

8. Navraťmež se opět ku vzorci (4) a pokusme se o rozklad determinantu Δ_{n-2}. Tento determinant liší se od Δ_n jedině tím, že mu schází p-tý a r-tý řádek, jakož i q-tý a s-tý sloupec. Vyjměme z determinantu Δ_n libovolný prvek a_{tu}, jenž se žádným z prvků a_{pq}, a_{rs} neleží v stejné řadě a ustanovme, v kolikátém řádku a sloupci determinantu Δ_{n-2} se vyskytuje. Je-li $p > r > t$ a $q > s > u$, t. j. není-li v komplexích prt a qsu žádných postupův, nemá vynechání p-tého i r-tého řádku, jakož i q-tého a s-tého sloupce na posici prvku a_{tu} žádného vlivu. Je-li však některý z prvků p, r, t aneb q, s, u menší, než poslední v té komplexi, tu zmenší se množství řad před prvkem a_{tu} stojících o tolik jednotek, kolik postupův v obou komplexích povstane vzhledem k posledním prvkům t a u. Označíme-li písmenem β množství postupů, jež v obou komplexích prt a qsu vzhledem ku t a u povstanou, bude $t + u - \beta$ množství řádků a sloupců determinantu Δ_{n-2}, jež nám třeba projíti, než k prvku a_{tu} dojdeme. Pročež bude

$$\Delta_{n-2} = \Sigma (-1)^{t+u-\beta} . a_{tu} . \Delta_{n-3} , \tag{7}$$

kdež Δ_{n-3} jest podřízený determinant třetího řádu, jenž povstane, když v Δ_{n-2} vynecháme ony řady, v nichž a_{tu} přichází. Znaménko Σ značí součet všech podobných součinův, v nichž buď t konstantní a u proměnlivé přijímající hodnoty od 1 do n vyjma q a s aneb u konstantní a t proměnlivé od 1 do n avšak nikdy rovno p ani r.

Poněvadž determinant Δ_{n-3} obsahuje $(n-3)$ řady, jest $(n-3)$-tího stupně a povstane též z Δ_n vynecháním všech řad, v nichž leží prvky a_{pq}, a_{rs}, a_{tu}. Množství součinů tvaru $a_{tu} . \Delta_{n-3}$ bude $(n-2)$.

9. Jsou-li a_{pq}, a_{rs}, a_{tu} tři libovolné prvky determinantu Δ_n z různých řad vzaté, snadno sečteme veškeré členy tohoto determinantu vyvinutého, jež tyto prvky mezi svými činiteli obsahují. Třeba nám pouze výrazy (2), (3) a (7) spolu spojiti, čímž pro žádaný součet vznikne výraz

$$S_3 = (-1)^{i_3-\lambda_3} . a_{pq}\, a_{rs}\, a_{tu}\, \Delta_{n-3} , \tag{8}$$

kdež

$$i_3 = p + q + r + s + t + u$$

a

$$\lambda_3 = \alpha + \beta .$$

Zde značí i_3 součet přípon daných tří prvků a λ_3 množství postupů, jež v komplexích prt a qsu přichází.

Na př. měl by se v determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{15} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{51} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix}$$

ustanoviti součet oněch členův, jež obsahují prvky a_{23}, a_{52}, a_{35}. Součet přípon jest 20 a množství postupů v komplexích 253 a 325 jest 4, tudíž

$$i_3 - \lambda_3 = 16$$

a žádaný součet bude

$$+ a_{23}\, a_{52}\, a_{35} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Podobně bychom obdrželi součet členů obsahujících prvky a_{21}, a_{32}, a_{54}

$$- a_{21}\, a_{32}\, a_{54} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}.$$

10. Kolik takovýchto částečných součinův lze vůbec utvořiti? Tolik, kolik různých součinův $a_{pq} \,.\, a_{rs} \,.\, a_{tu}$ lze sestaviti z prvků determinantu Δ_n tak, aby prt a qsu byly různé sestavy z čísel $1, 2, 3, \ldots n$.

Sestav prt lze z těchto čísel utvořiti $\binom{n}{3}$, podobně též qsu, pročež by vzniklo $\binom{n}{3}^2$ různých součinův $a_{pq} \,.\, a_{rs} \,.\, a_{tu}$. Avšak ve všech sestavách jdou prvky postupem přirozeným. Pročež lze každou ze sestav permutovati, ale jen u jedněch přípon, na př. prt, kdežto qsu necháme v pořádku přirozeném. Tím tedy obdržíme celkem variací

$$3!\binom{n}{3}^2.$$

Determinant Δ_{n-3} jsa $(n-3)$-tého stupně dá rozvinut $(n-3)!$ členy, pročež odpovídá každý částečný součin $(n-3)!$ členům a tudíž by všecky možné částečné součiny obsahovaly

$$3!\binom{n}{3}^2 (n-3)! = \binom{n}{3} n!$$

členů, t. j. $\binom{n}{3}$-krát více, než jest všech členů vyvinutého determinantu $\varDelta_n$. Již z toho vyplývá, že lze determinant $\varDelta_n$ rozložiti v součiny tvaru (8) spůsoby $\binom{n}{3}$-mi.

11. Jdou-li v součinu $a_{pq} \,.\, a_{rs} \,.\, a_{tu}$ přípony prt a qsu za sebou v pořádku přirozeném, bude $\lambda_3 = 6$ a tudíž lze částečný součin (8) psáti též

$$S_3 = (-1)^{\lambda_3} \,.\, a_{pq}\, a_{rs}\, a_{tu}\, \varDelta_{n-3} \,.$$

Permutováním buď prvých aneb druhých přípon změní se každou záměnou množství převratů a tudíž i postupů o číslo liché, t. j. součin (9) promění pouze znaménko, a sloučíme-li částečné součiny tak obdržené v jeden, vznikne

$$T_3 = (-1)^{\lambda_3} . \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} & a_{pu} \\ a_{rq} & a_{rs} & a_{ru} \\ a_{tq} & a_{ts} & a_{tu} \end{vmatrix} . \varDelta_{n-3} = (-1)^{\lambda_3} . \begin{vmatrix} q\,s\,u \\ p\,r\,t \end{vmatrix} . \varDelta_{n-3} \,. \quad (10)$$

Takovýchto součinů lze $\binom{n}{3}^2$ utvořiti a jelikož

$$3!\binom{n}{3}(n-3)! = n!,$$

dostačí jich pouze $\binom{n}{3}$ k úplnému vyvinutí determinantu $\varDelta_n$ t. j. tento determinant lze rozložiti $\binom{n}{3}$-mi spůsoby na částečné součiny tvaru (10). Zůstávají-li buď p, r, t aneb q, s, u konstantními, platí výraz

$$\varDelta_n = \Sigma (-1)^{\lambda_3} . \begin{vmatrix} q\,s\,u \\ p\,r\,t \end{vmatrix} . \varDelta_{n-3} \,, \quad (11)$$

v němž Σ značí součet všech podobných součinů, jež vzniknou kombinací přípon proměnlivých z čísel 1, 2, 3, ... n. Takovýchto výrazů bude množství $\binom{n}{3}$, neb konstantní přípony lze $\binom{n}{3}$-mi spůsoby z čísel 1, 2, 3, ... n kombinovati a dle každé kombinace determinant $\varDelta_n$ rozložiti. Na př.

$$\begin{vmatrix} 12345 \\ 12345 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 235 \\ 123 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 14 \\ 45 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 235 \\ 124 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 14 \\ 35 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} 235 \\ 125 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 14 \\ 34 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 235 \\ 134 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 14 \\ 25 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 235 \\ 135 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 14 \\ 24 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}2\,3\,5\\1\,4\,5\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\2\,3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2\,3\,5\\2\,3\,4\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\1\,5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2\,3\,5\\2\,3\,5\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\1\,4\end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix}2\,3\,5\\2\,4\,5\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\1\,3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2\,3\,5\\3\,4\,5\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\1\,2\end{vmatrix}.$$

Předložený determinant mohli bychom naznačeným spůsobem $\binom{5}{3} = 10$-kráte rozložiti. I zde přesvědčili jsme se o výhodnosti našeho pravidla pro ustanovení znamének částečných součinů. U tohoto příkladu lze též znamenati, že jest lhostejno, zařídíme-li znaménko částečného součinu dle determinantu prvého aneb dle druhého, neb součet všech přípon v obou determinantech jest vždy číslem sudým a tudíž musí součty přípon jejich býti současně buď čísly sudými aneb lichými.

12. Rozložíme-li determinant Δ_{n-3} podobným pochodem, jako Δ_{n-2}, obdržíme

$$\Delta_{n-3} = \Sigma\,(-1)^{v+x-\gamma}\,.\,a_{vx}\,.\,\Delta_{n-4}\,,$$

kdež a_{vx} libovolný prvek determinantu Δ_n neležící se žádným z prvků a_{pq}, a_{rs}, a_{tu} v téže řadě. Nápotom jest Δ_{n-4} podřízený determinant čtvrtého řádu, jenž z Δ_n povstane vynecháním p-tého, r-tého, t-tého a v-tého řádku, jakož i q-tého, s-tého, u-tého a x-tého sloupce. γ znamená množství postupů v komplexích *prtv* a *qsux* vzhledem k posledním prvkům v, x. Konečně značí Σ součet podobných součinů, jež povstanou, když jedna z přípon prvku a_{vx} konstantní a druhá proměnlivá od 1 do n avšak nikdy není rovna stejnolehlé příponě některého z prvků a_{pq}, a_{rs}, a_{tu}.

13. Jsou-li tedy a_{pq}, a_{rs}, a_{tu}, a_{vx} čtyři libovolné prvky z různých řad determinantu Δ_n vzaté, bude součet všech členů tohoto determinantu, jenž obsahují mezi svými činitely též všecky tyto prvky,

$$S_4 = (-1)^{i_4-\lambda_4}\,.\,a_{pq}\;a_{rs}\;a_{tu}\;a_{vx}\;\Delta_{n-4}\,, \tag{13}$$

kdež

$$i_4 = p+q+r+s+t+u+v+x$$

a

$$\lambda_4 = \alpha+\beta+\gamma\,.$$

λ_4 patrně udává množství všech postupův v komplexích *prtv* a *qsux*. Na př. má se ustanoviti v determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{18} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{81} & \dots & a_{88} \end{vmatrix}$$

součet všech členů, jež obsahují prvky a_{25}, a_{43}, a_{17}, a_{62}. Zde bude

$$i_4 - \lambda_4 = 30 - 6 = 24$$

a žádaný součet roven

$$+ a_{25}\, a_{43}\, a_{17}\, a_{62} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} & a_{36} & a_{38} \\ a_{51} & a_{54} & a_{56} & a_{58} \\ a_{71} & a_{74} & a_{76} & a_{78} \\ a_{81} & a_{84} & a_{86} & a_{88} \end{vmatrix}.$$

14. Množství součtů tvaru (13) jest

$$4!\binom{n}{4}^2$$

a jelikož Δ_{n-4} sám obsahuje $(n-4)!$ členů, obsahují všecky možné součty S_4 celkem

$$4!\binom{n}{4}^2(n-4)! = \binom{n}{4} n!$$

členů, což jest $\binom{n}{4}$-krát více, než Δ_n obsahuje, pročež lze Δ_n rozložiti $\binom{n}{4}$-kráte v částečné součiny. Jdou-li v součinu a_{pq} a_{rs} a_{tu} a_{vx} přípony $prtv$ a $qsux$ za sebou v pořádku přirozeném, bude λ_4 číslem sudým a tudíž lze místo (13) psáti

$$S_4 = (-1)^{i_4} \,.\, a_{pq}\, a_{rs}\, a_{tu}\, a_{vx}\, \Delta_{n-4}\,. \qquad (14)$$

15. Permutujeme-li buď pouze prvé aneb pouze druhé přípony, promění se každou záměnou znaménko součinu a sloučíme-li veškeré součiny tak povstalé v jeden, obdržíme

$$T_4 = (-1)^{i_4} \,.\, \begin{vmatrix} q & s & u & x \\ p & r & t & v \end{vmatrix} .\, \Delta_{n-4}\,. \qquad (15)$$

Jelikož jsme vždy $4!$ součiny sloučili v jeden, bude částečných součinů tvaru (15) vůbec $\binom{n}{4}^2$ a poněvadž

$$4!\binom{n}{4}(n-4)! = n!\,,$$

dostačí součinů tvaru (15) k úplnému utvoření determinantu Δ_n

pouze množství $\binom{n}{4}$, t. j. Δ_n lze $\binom{n}{4}$-mi spůsoby v částečné součiny tvaru (15) rozložiti.

Považujeme-li buď p, r, t, v aneb q, s, u, x za konstantní, lze psáti

$$\Delta_n = \Sigma\,(-1)^{i_4} . \begin{vmatrix} q\,s\,u\,x \\ p\,r\,t\,v \end{vmatrix} . \Delta_{n-4} . \qquad (16)$$

Kombinujíce konstantní přípony obdržíme $\binom{n}{4}$ takové výrazy. Na př.

$$\begin{vmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,6\,7 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 5\,6\,7 \\ 1\,2\,5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1\,2\,3\,5 \\ 3\,4\,6\,7 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 4\,6\,7 \\ 1\,2\,5 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1\,2\,3\,6 \\ 3\,4\,6\,7 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 4\,5\,7 \\ 1\,2\,5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1\,2\,3\,7 \\ 3\,4\,6\,7 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 4\,5\,6 \\ 1\,2\,5 \end{vmatrix} + \ldots$$

Všech částečných součinů bylo by

$$\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35 .$$

Zároveň patrno, že znaménka jednotlivých součinů lze též z přípon druhého činitele obdržeti, jelikož součty přípon v obou determinantech každého součinu musí býti zároveň buď čísly sudými aneb lichými.

16. Pokračujeme-li takovým spůsobem dále, shledáme, že pravidlo odvození platí obecně. Jsou-li tedy

$$a_{pq}\; a_{rs}\; a_{tu}\; \ldots\; a_{yz}$$

libovolné prvky z různých řad determinantu Δ_n a je-li množství jejich k, bude součet všech členů vyvinutého determinantu Δ_n, které tyto prvky mezi svými činitely obsahují

$$S_k = (-1)^{i_k - \lambda_k} . a_{pq}\; a_{rs}\; a_{tu} \ldots . a_{yz}\; \Delta_{n-k} , \qquad (17)$$

kdež

$$i_k = p + q + r + s + \ldots . + y + z$$

a λ_k značí množství postupů v komplexích $p\,r\,t \ldots y$ a $q\,s\,u \ldots z$ obsažených. Δ_{n-k} jest podřízený determinant k-tého řádu, jenž z Δ_n povstane, když v tomto vynecháme všechny řady, v nichž prvky a_{pq}, a_{rs}, …. a_{yz} se vyskytují. Patrně bude Δ_{n-k} determinant $(n-k)$-tého stupně, jenž se skládá z $(n-k)!$ členů.

17. Kolik součtů tvaru (17) lze utvořiti? Snadno nám dokázati, že

$$k!\binom{n}{k}^2,$$

a tudíž bude, provedeme-li násobení, celkem následující množství všech členů:

$$k!\binom{n}{k}^2 (n-k)! = \binom{n}{k} n!$$

t. j. $\binom{n}{k}$-krát více, než jich obsahuje úplně rozvinutý determinant Δ_n. Pročež lze tento determinant $\binom{n}{k}$ různými spůsoby rozložiti v částečné součiny tvaru (17).

18. Nechať následují přípony $p\,r\,t \ldots y$ a $q\,s\,u \ldots z$ za sebou v pořádku přirozeném. Tu bude λ_k vždy číslem sudým a pročež možno místo (17) psáti

$$S_k = (-1)^{i_k} a_{pq}\, a_{rs}\, a_{tu} \ldots . a_{yz}\, \Delta_{n-k}\,. \qquad (18)$$

Ponecháme-li prvé přípony stálými a permutujeme-li druhé aneb naopak, změní se každou záměnou proměnlivých přípon pouze znaménko součinu (18). Sloučíme-li nápotom všecky tak povstalé součiny v jeden, obdržíme

$$T_k = (-1)^{i_k} . \begin{vmatrix} q\,s\,u \ldots z \\ p\,r\,t \ldots y \end{vmatrix} . \Delta_{n-k}\,. \qquad (19)$$

19. Jelikož jsme takým činem $k!$ součinů sloučili v jeden, bude jich nyní pouze $\binom{n}{k}^2$.

Každý součin (19) dá po úplném rozvinutí

$$k!\,(n-k)!$$

členův, pročež bude v součinech T_k celkem $\binom{n}{k} n!$ členův.

Jelikož

$$k!\binom{n}{k}(n-k)! = n!,$$

dostačí tedy pouze $\binom{n}{k}$ takových součinů T_k k utvoření determinantu Δ_n a tudíž, necháme-li buď $p\,r\,t \ldots y$ aneb $q\,s\,u \ldots z$ stálými, lze postaviti

$$\varDelta_n = \Sigma(-1)^{i_k} \cdot \begin{vmatrix} q\, s\, u \ldots\ldots z \\ p\, r\, t \ldots\ldots y \end{vmatrix} \cdot \varDelta_{n-k}. \qquad (20)$$

Permutováním proměnlivých přípon vyvineme, jak známo, prvý determinant. Kombinováním pak konstantních přípon lze takovýchto výrazů utvořiti množství $\binom{n}{k}$, t. j. $\varDelta_n$ lze $\binom{n}{k}$ způsoby v podřízené determinanty rozložiti. V každém částečném součinu jest prvý činitel determinant podřízený k-tého stupně a druhý $(n-k)$-tého stupně. Pročež lze (20) též psáti

$$\varDelta_n = \Sigma(-1)^{i_k} \varDelta_k \varDelta_{n-k}. \qquad (21)$$

Písmeno i_k značí při tom součet všech přípon determinantu $\varDelta_k$.

Avšak součty přípon v obou determinantech $\varDelta_k$ a $\varDelta_{n-k}$ musí býti zároveň čísly sudými aneb lichými, tudíž

$$(-1)^{i_k} = (-1)^{i_{n-k}}.$$

Lze tedy znaménko částečného součinu nařízditi dle kteréhokoliv z obou činitelů.

20. Z celého pojednání plyne následující obecná poučka:

Každý determinant n-tého stupně lze rozložiti v částečné součiny vždy determinantu k-tého s determinantem $(n-k)$-tého stupně. Nejprvé sestavíme z přípon 1, 2, 3, ... n libovolnou kombinaci k-té třídy, kterou postavíme buď za konstantní přípony řádkové aneb sloupcové determinantu prvého. Zbývající přípony dáme v přirozeném postupu v stejné vlastnosti do determinantu druhého.

Ostatní pak přípony prvého determinantu obdržíme, utvoříme-li z přípon 1, 2, 3, ... n všecky kombinace k-té třídy.

Zbývající vždy přípony postavíme v stejné vlastnosti do determinantu druhého a to v postupu přirozeném. Znaménko každého součinu jest buď $(+)$ aneb $(-)$, dle toho, je-li součet všech přípon jednoho z obou determinantů buď číslo sudé aneb číslo liché. Množství všech částečných součinů jest $\binom{n}{k}$.

Postavíme-li postupně na místo konstantních přípon všecky možné kombinace čísel 1, 2, 3, ... n, obdržíme $\binom{n}{k}$ různých rozkladů téhož determinantu $\varDelta_n$.