Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vavřinec Jelínek

Za jakých podmínek lze vést vrcholem trojúhelníka příčku, která by byla střední měřicky úměrnou úseků, jež stanoví na protější straně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 5, 232--238

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123019

Přičteme-li (3) k (1), obdržíme

$$(4) \qquad p > p' + t_1.$$

Protože je tlak vzduchu vnějšího (p) v trubici větší než vztlak $p' + t_1$, bude vzduch bublinami vcházeti do láhve až

$$(5) \qquad p = p' + t_1.$$

Přičteme-li k této rovnici nerovnici (3) $t_1 < t_2$, obdržíme

$$p < p' + t_2.$$

Tudíž tlak z vnitřka $p' + t_2$ v otvoru (a) je větší nežli tlak vnější p a kapalina bude vytékati rozdílem tlaků $p' + t_2$ a p, tudíž tlakem

$$\tau = p' + t_2 - p = p' + t_2 - (p' + t_1) = t_2 - t_1$$

a rychlostí takovou, jakoby hladina byla ve výši dolního otvoru trubice.

Za jakých podmínek lze vésti vrcholem trojúhelníka příčku, která by byla střední měřicky úměrnou úseků, jež stanoví na protější straně.

Napsal

Vavřinec Jelínek,
professor v Novém Městě u Vídně.

Sestrojujíce hledanou příčku s vrcholu B, opišme danému trojúhelníku ABC kružnici a nad její poloměrem OB jakožto průměrem kružnici druhou, která protější stranu AC $= b$ protne v bodech D a E. Obě přímky BD i BE vyhovují dané podmínce. Neboť prodloužíme-li přímky tyto v tětivy BP a BQ první kružnice, bude

$$AD \,.\, DC = BD \,.\, DP;$$

a ježto B je středem podobnosti kružnic (O) a (S), máme

$$BD = DP,$$

takže předešlá rovnice přejde v

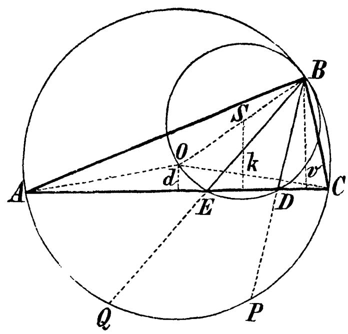
$$AD \,.\, DC = BD^2.$$

Rovněž $$AE \,.\, EC = BE^2.$$

Spustíme-li na stranu AC ze středu O první kružnice kolmici d, ze středu S druhé kružnice kolmici k a konečně výšku v, bude vždy

$$k = \frac{d+v}{2}.$$

Na délce k závisí, protne-li druhá kružnice stranu b čili



nic. Najdeme totiž v trojúhelníku dvě, neb jen jednu hledanou přímku, aneb nenajdeme žádné, dle toho, je-li $\frac{R}{2} \gtreqless k$ čili

$$R \gtreqless d + v,$$

kde R znamená poloměr opsané kružnice.

Ježto $d = R \cos \frac{AOC}{2} = R \cos \beta$, přejde podmínka tato v

$$R \gtreqless (R \cos \beta + v)$$

čili

$$R (1 - \cos \beta) \gtreqless v$$

aneb

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} \gtreqless \frac{v}{2R}.$$

Avšak, znamenají-li a a c nerozdělené strany trojúhelníka, jest

$$2R = \frac{ac}{v},$$

a proto zní naše podmínka

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} \gtreqless \frac{v^2}{ac}.$$

Při obvyklém označení $2s = a + b + c$ můžeme psáti

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{(s-a)(s-c)}{ac},$$

$$v^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2},$$

čímž podmínka tato obdrží tvar

$$b^2 \gtreqless 4s(s-b)$$

čili

$$b^2 \gtreqless (a+c)^2 - b^2$$

aneb konečně

$$\text{(I)} \qquad b\sqrt{2} \gtreqless a + c,$$

t. j. je-li součet nerozdělených stran roven úhlopříčné čtverce sestrojeného nad stranou rozdělenou, obdržíme jedinou příčku uvažovaného způsobu; je-li součet ten menší, dvě příčky, a je-li větší, žádnou.

Kdybychom do hořejší rovnice $\sin^2 \frac{\beta}{2} \gtreqless \frac{v^2}{ac}$ dosadili

$$v = c \sin \alpha$$

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma},$$

obdrželi bychom hledanou podmínku ve tvaru

$$\text{(II)} \qquad \sin^2 \frac{\beta}{2} \gtreqless \sin \alpha \sin \gamma.$$

Z věty této následuje, je-li $\alpha = \gamma$, že

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} \gtreqless \sin^2 \alpha,$$

$$\beta \gtreqless 2\alpha.$$

V rovnoramenném trojúhelníku existuje tedy jedna příčka našeho druhu, je-li

$$2\alpha = \beta = \frac{180^0}{2} \quad \text{či} \quad \alpha = 45^0,$$

a existují příčky dvě, je-li

$$2\alpha < \beta > \frac{180^0}{2} \quad \text{či} \quad \alpha < 45^0;$$

v rovnostranném trojúhelníku příčky takové nepřicházejí, poněvadž v něm jest $\beta < 2\alpha$.

V pravoúhlém trojúhelníku ($\beta = 90^0$) jest

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = \sin^2 45^0 = \frac{1}{2};$$

a poněvadž

$$\sin\alpha \sin\gamma = \sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha,$$

je zde z podmínek (II) možným pouze případ

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} > \sin\alpha \sin\gamma,$$

poněvadž podmínka (II) zní v tomto případě

$$\frac{1}{2} \gtreqless \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

V různostranném trojúhelníku prvoúhlém lze tedy vésti hlavním vrcholem dvě příčky našeho druhu, jedna půlí přeponu, druhá je na ní kolmo.

Je-li v různostranném trojúhelníku úhel $\beta > 90^0$, bude $\sin^2 \frac{\beta}{2}$ větší, a $\sin\alpha \sin\gamma$ menší než v trojúhelníku pravoúhlém; tudíž tím spíše je zde možným pouze případ

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} > \sin\alpha \sin\gamma,$$

z čehož vychází, že v různostranném trojúhelníku tupoúhlém najdeme dvě žádané příčky vedené vrcholem tupého úhlu. Tyto protínají základnu v různých jejích polovinách.

Pro různostranný trojúhelník ostroúhlý nutno obecnou podmínku vyšetřiti od případu k případu. Najdou-li se v něm dvě žádané úměrné, protínají rozdělenou stranu vždy v téže její polovině.

Napíšeme-li rovnici (I) v podobě

$$\frac{a+c}{b} \lesseqgtr \sqrt{2},$$

a zaměníme-li poměr stran poměrem sinusů, máme

$$\frac{\sin\alpha + \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} \lesseqgtr \sqrt{2},$$

aneb

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} \lesseqgtr \sqrt{2},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\gamma - \sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma} \lesseqgtr \sqrt{2},$$

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma} \lesseqgtr \sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma \lesseqgtr \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma \lesseqgtr \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma \lesseqgtr \frac{1-\cos 45^0}{1+\cos 45^0},$$

čili konečně

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma \lesseqgtr \operatorname{tg}^2\frac{45^0}{2}.$$

Z podmínky této lze vyvoditi tytéž výsledky, jako z věty (II). Vyšetříme význam její ještě způsobem jiným.

Přímky, které půlí úhly α a γ, se protínají ve středu kružnice, vepsané trojúhelníku ABC. Určíme-li místo tohoto středu úsečkou x a pořadnicí y, majíce zřetel k pravoúhlé soustavě, jejíž osa X leží ve straně b trojúhelníka, a osa Y půlí stranu b, bude

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{y}{\frac{1}{2}b+x},\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{y}{\frac{1}{2}b-x}.$$

V případě rovnosti u podmínky (III) musí tedy

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{4}-x^2}=\operatorname{tg}^2\frac{45^0}{2}.$$

Měníme-li v trojúhelníku vrchol B, probíhá střed vepsaného trojúhelníka křivku danou poslední rovnicí, t. j. rovnicí

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}b\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{45^0}{2}\right)^2}=1,$$

a jest patrně ellipsou, jejíž velká osa je strana AC $=b$, a malá osa $b\operatorname{tg}\frac{45^0}{2}$. Máme tedy větu, že geometrické místo středů vepsaných kružnic do trojúhelníků, které mají společnou stranu, a v nichž lze vésti proměnným vrcholem jedinou příčku měřicky úměrnou s úseky, jež ona stanoví na straně společné, jest ellipsa mající společnou stranu trojúhelníků za osu velkou, a jejíž malá osa se k ní nachází v poměru $\operatorname{tg}\frac{45^0}{2}$.

Vpadá-li střed vepsané kružnice do vnitř této ellipsy, je-li tedy

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}b^2-x^2}<\operatorname{tg}^2\frac{45^0}{2},$$

budou v trojúhelníku existovati dvě žádané příčky; neboť pak bude také

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma<\operatorname{tg}^2\frac{45^0}{2};$$

leží-li však střed vepsané kružnice mimo ellipsu, je-li tedy

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}b^3 - x^2} > \operatorname{tg}^2 \frac{45^0}{2},$$

nebude lze vésti v dotyčném trojúhelníku příček žádaného druhu, ano zde

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma > \operatorname{tg}^2\frac{45^0}{2}.$$

Obrácené vidmo sodíkové.

Napsal

Vlad. Švejcar, prof. v Příbrami.

Před petrolejovou lampu o vysokém plameni postavíme skulinu, od této ve vzdálenosti jednoho metru umístíme sírouhlíkový hranol (neb dva hranoly skleněné), před něj postavíme líhový kahan (neb hořák plynový) se silným plamenem, do něhož dáme as jako hrách velké klubíčko asbestové, železným drátkem ovinuté, a do nasyceného roztoku kuchyňské soli častěji namáčené. Takto zbarveným, žlutým plamenem a hranolem hledíme na skulinu ve vidmo, v němž ve žlutém poli objeví se nám temná čára, protaženou. Aby pozorovatel ihned pravý směr, jímž hleděti jest, našel, můžeme před oko postaviti stěnu s otvorem. Pro větší bezpečnost dáme mezi sírouhlíkový hranol a plamen desku skleněnou. Místnost částečně zatemníme.

Drobné zprávy.

Napsal

Alois Strnad,
professor v Praze.

Z theorie rovnic. Je-li $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$ kořenem rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = 0,$$

v níž a_k jsou realné součinitele, plynou užitím věty Moivreovy