Alois Strnad

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 5, 238--245

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123018

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}b^3 - x^2} > \operatorname{tg}^2 \frac{45^0}{2},$$

nebude lze vésti v dotyčném trojúhelníku příček žádaného druhu, ano zde

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma > \operatorname{tg}^2\frac{45^0}{2}.$$

Obrácené vidmo sodíkové.

Napsal

Vlad. Švejcar, prof. v Příbrami.

Před petrolejovou lampu o vysokém plameni postavíme skulinu, od této ve vzdálenosti jednoho metru umístíme sírouhlíkový hranol (neb dva hranoly skleněné), před něj postavíme líhový kahan (neb hořák plynový) se silným plamenem, do něhož dáme as jako hrách velké klubíčko asbestové, železným drátkem ovinuté, a do nasyceného roztoku kuchyňské soli častěji namáčené. Takto zbarveným, žlutým plamenem a hranolem hledíme na skulinu ve vidmo, v němž ve žlutém poli objeví se nám temná čára, protaženou. Aby pozorovatel ihned pravý směr, jímž hleděti jest, našel, můžeme před oko postaviti stěnu s otvorem. Pro větší bezpečnosť dáme mezi sírouhlíkový hranol a plamen desku skleněnou. Místnosť částečně zatemníme.

Drobné zprávy.

Napsal

Alois Strnad,
professor v Praze.

Z theorie rovnic. Je-li $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$ kořenem rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = 0,$$

v níž a_k jsou realné součinitele, plynou užitím věty Moivreovy a odloučením části realné od imaginárné bezprostředně tyto dva vzorce:

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(n-k)\alpha = 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sin(n-k)\alpha = 0.$$

Mimo kořen svrchu psaný má rovnice daná kořenem též hodnotu sdruženou, a jelikož

$$\cos\alpha \pm i \sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha \mp i\sin\alpha},$$

má tytéž kořeny rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0.$$

Spůsobem naznačeným obdržíme z této rovnice další dva vzorce

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\alpha = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} a^k \sin k\alpha = 0,$$

z nichž poslední podal *Greenstreet.*

(*Mathesis*, *1891*, *p. 280*).

Symmetrické funkce. Jsou-li $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ kořeny rovnice

$$x_n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

a je-li

$$s_t = \sum_{r=1}^{n} x_r^t,$$

jest, jak známo,

$$\sum_{n=1}^{n} a_{n-t} s_t + n a_n = 0.$$

Klademe-li do rovnice této za n postupně hodnoty 1, 2, 3, ... n, obdržíme n lineárných rovnic, které lze řešiti dle s_n neb dle a_n. Bude pak

$$s_n = (-1)^n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n-1)a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & 1 \\ na_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 \end{vmatrix}, \qquad \text{(I)}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \begin{vmatrix} s_1 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & n-2 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \dots & 1 \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix}. \tag{II}$$

(Vzorce tyto viz též v *Řehořovského* Vyšší algebře, str. 10. a 11.)

Značí-li σ_t součet všech $\binom{n}{t}$ kombinací třídy t z prvků $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, jest podobně

$$s_n = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \dots & 0 \\ 3\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)\sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \dots & 1 \\ n\sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix}, \tag{I}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} s_1 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & n-2 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \dots & 1 \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix}. \tag{II}$$

Klademe-li $h_t = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n)^t$, jest

$$h_n = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \dots & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \dots & 1 \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix}. \tag{III}$$

Tyto a jiné zajímavé relace mezi součiniteli a kořeny dané rovnice vyvodil *Gambioli*, upozorniv, že se ve všech vyskytují determinanty tří základních typův (I), (II) a (III).

(Battaglini, Giornale di Matematiche, volume XXIX. p. 41—60).

Čísla a funkce Bernoulliovy. V Časopisu tohoto, ročníku XVII. (str. 178—180), podal jsem zprávu o některých pracích zabývajících se důležitými v analysi *čísly Bernoulliovými.* Nejnověji jednal o nich p. *Berger* v Upsale (Recherches sur les nombres et les fonctions de Bernoulli). Týž ji definuje jakožto nekonečnou řadu čísel

$$B(0),\ B(1),\ B(2),\ B(3), \ldots$$

vyhovujících rovnici

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots k} = 0$$

při $m \geqq 2$ a $B(0) = 1$. Kladouce do této rovnice po řadě $m = 2$, 3, 4, ... obdržíme

$$B(1) = -\frac{1}{2}, \quad B(2) = \frac{1}{12}, \quad B(4) = -\frac{1}{720}, \quad B(6) = \frac{1}{30240},$$
$$B(8) = -\frac{1}{1209600}, \quad B(2n+1) = 0.$$

S čísly těmi souvisí *funkce Bernoulliovy*

$$\varphi(z, 0), \quad \varphi(z, 1), \quad \varphi(z, 2), \ldots$$

které pro hodnotu z vyhovují rovnici

$$\varphi'(z, m) = \varphi''(z, m+1) \text{ při } m \geqq 0,$$

s podmínkami

$$\begin{aligned} &\varphi(z, 0) = 0, \ \varphi(0, m) = 0 \text{ při } m \geqq 0 \\ &\varphi(1, 1) = 1, \ \varphi(1, m) = 0 \quad \text{„} \quad m \geqq 2. \end{aligned}$$

Jest pak

$$\varphi(z, 1) = z, \ \varphi(z, 2) = \frac{z^2}{2} - \frac{z}{2}, \ \varphi(z, 3) = \frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{4} + \frac{z}{12},$$
$$\varphi(z, 4) = \frac{z^4}{24} - \frac{z^3}{12} + \frac{z^2}{24}, \ \varphi(z, 5) = \frac{z^5}{120} - \frac{z^4}{48} + \frac{z^3}{72} - \frac{z}{720}$$

a obecně při $m \geqq 1$

$$\varphi(z, m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k) z^k}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots\ldots k}.$$

O derivacích těchto funkcí pozoruhodným jest vztah

$$\varphi^k(z, m) = \varphi(z, m-k) + B(m-k).$$

Neodvisle od čísel Bernoulliových jsou funkce tyto určeny relací

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(z, m-k)}{1.2.3\ldots.k} = \frac{z^{m-k}}{1.2.3\ldots.(m-1)}.$$

Jinou jich vzájemnosť vyslovuje tato věta:
Je-li z veličina libovolná a $|v| < 2\pi$, jest

$$\frac{v}{e^v - 1} = \mathrm{B}(0) + \mathrm{B}(1)v + \mathrm{B}(2)v^2 + \ldots.$$

$$v\frac{e^{zv-1}-1}{e^v-1} \varphi(z, 0) + \varphi(z, 1)v + \varphi(z, 2)v^2 + \ldots.$$

Odtud při $v = 1$ plyne

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \mathrm{B}(k) = \frac{1}{e-1}, \quad \sum_{k=0}^{k=\infty} \varphi(z, k) = \frac{e^z - 1}{e - 1}.$$

Další úvahy jmenovaného pojednání vyvinují funkce Bernoulliovy v řady trigonometrické. Značného pak zobecnění dostává se těmto číslům a funkcím užitím Kroneckrova „fundamentálního diskriminantu“ arithmetického. Tak slove každé číslo celé Δ, které není úplným čtvercem a má jeden z těchto tvarů

$$\Delta = \mathrm{P}, \quad \Delta = 4\mathrm{P}, \quad \Delta = 8\mathrm{P},$$

kdež P jest číslo celé nesoudělné s každým úplným čtvercem (mimo 1).

Nechať značí $\left(\frac{\Delta}{r}\right)$ celistvou část podílu $\frac{\Delta}{r}$ mimo to ε znaménko hodnoty Δ, tedy $\varepsilon = \pm 1$; potom nazývá autor citovaného pojednání čísly a funkcemi Bernoulliovými příslušnými k diskriminantu Δ součinitele vyvinutých řad

$$\frac{v}{e^v - 1} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} = \mathrm{B}(0, \Delta) + \mathrm{B}(1, \Delta)v + \mathrm{B}(2, \Delta)v^2 + \ldots,$$

$$v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} = \varphi(z, 0, \Delta) + \varphi(z, 1, \Delta)v + \varphi(z, 2, \Delta)v^2 + \ldots$$

a vyšetřuje rozmanité jich vztahy a vlastnosti.

Ku konci výborné této práce podána dosti zevrubná literatura čísel jmenovaných.

(G. Mittag-Leffler, Acta mathematica, tome XIV. 1891, p. 249— 304).

Křivka Agnesiové. Mezi ženami, které pěstováním mathematiky jména sobě dobyly, proslula svého času italská spisovatelka *Maria Gaetana Agnesi* (1718—1799), zvláště spisem „Instituzione analitiche ad uso della gioventa italiana" (1748). Jméno její nese zvláštní křivka 3. stupně, na kterou tuto chceme upozorniti.

Dána buď kružnice K průměru $\overline{oa} = 2r$ a přímka P $\perp \overline{oa}$ u vzdálenosti $\overline{ob} = 2r - v$. Bodem a veďme paprsek, který seče K v bodě m, P v bodě n; sestrojme $\overline{mp} \perp \overline{oa}$, $\overline{np} \parallel \overline{oa}$, i jest bod p bodem křivky Agnesiové v širším smyslu. Zvolíme-li $\overline{oa}$ osou X, bod o počátkem soustavy pravoúhlé, jest rovnice křivky

$$y = v\sqrt{\frac{x}{2r - x}};$$

v případě $v = r$, kdy tedy přímka P prochází středem kružnice K, obdržíme křivku Agnesiové v užším smyslu.

Píšeme-li

$$y_1 = (2r - x)\sqrt{\frac{x}{2r - x}}, \quad y_2 = x\sqrt{\frac{x}{2r - x}},$$

jsou y_1, y_2 k témuž x slušící pořadnice bodu na kružnici a na cissoidě; jest pak

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

z čehož patrna souvislosť křivky Agnesiové s cissoidou Dioklovou.

Ke křivce lze v bodě p sestrojiti tečnu způsobem, jejž udal *Godefroy* a který snadně větou Pascalovou odůvodniti lze: Vedeme-li spojnici bodu n s bodem $q \equiv (\overline{oa}, \overline{mp})$ a stanovíme-li průsečík její r s tečnou kružnice K v bodě m, jest přímka $\overline{rp}$ tečnou obecné křivky Agnesiové v bodě p. *Longchamps* udal jinou konstrukci složitější, domnívaje se mylně, že hořejší platí jen při $v = r$.

(Journal de Mathématiques spéciales, 1885, p. 199—203; 1886, p. 226. Mathesis 1887, p. 1—2; 1891, p. 92; 1892, p. 94.)

Tři plochy druhého stupně protínají se v 8mi bodech, které touto vlastností se vyznačují: Průsečnice protějších rovin osmiúhelníka oněmi body stanoveného jsou čtyry přímky na hyperboloidu. Je-lí osmiúhelník 12345678 a značíli (123) rovinu určenou vrcholy 1, 2, 3, náležejí přímky

$$
\begin{aligned}
(123),\ (567) &= P_1\\
(234),\ (678) &= P_2\\
(345),\ (781) &= P_3\\
(456),\ (812) &= P_4
\end{aligned}
$$

témuž hyperboloidu. Tuto větu, kterou již dříve *Buchheim* vyslovil a která platíc pro každých 8 bodů prostorové křivky stupně třetího, jest v jistém smyslu rozšířením věty Pascalovy na útvary prostorové, dokázal jednoduchou synthetickou úvahou *Schröter*.

(Acta mathematica, tome XIV. 1891, p. 207—209).

Z neeuklidovské geometrie. Dáno-li v prostoru 5 libovolných bodů 1, 2, 3, 4, 5 a značí-li d_{ik} vzdálenosť $\overline{ik}$, jsou vzdánosti těchto 5ti bodů vázány určitou relací, kterou objevil *Lagrange* a kterou *Cayley* upravil ve formu determinantní

$$
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2\\
1 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2\\
1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2\\
1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 & d_{45}^2\\
1 & d_{15}^2 & d_{25}^2 & d_{35}^2 & d_{45}^2 & 0
\end{vmatrix} = 0.
$$

V rovnici této mohou d_{ik} znamenati poměrná čísla délek vztažených k téže míře jakékoliv.

Jinak jest v geometrii neeuklidovské; zde existuje určitá charakteristická vzdálenosť $\varDelta$ absolutní, ku které všechny ostatní jest vztahovati. Libovolných 5ti bodů vzdálenosti taktéž vyhovují určité podmínce, kterou *Mansion* vyvodil ve tvaru

$$
\begin{vmatrix}
(11) & (12) & (13) & (14) & (15)\\
(12) & (22) & (23) & (24) & (25)\\
(13) & (23) & (33) & (34) & (35)\\
(14) & (24) & (34) & (44) & (45)\\
(15) & (25) & (35) & (45) & (55)
\end{vmatrix} = 0,
$$

kdež

$$(ik) = \cos\left(\frac{d_{ik}}{\Delta}\right) \text{ v geometrii Lobačevského,}$$

$$(ik) = \mathrm{Ch}\left(\frac{d_{ik}}{\Delta}\right) \text{ v geometrii Riemannově.}$$

Píšeme-li hořejší relace ve tvaru $(12345) = 0$, tu v každé geometrii vztahy šesti bodů

$$(12345) = 0, \quad (12346) = 0, \quad (12356) = 0$$

mají nutný následek

$$(23456) = 0, \quad (13456) = 0, \quad (12456) = 0,$$

čímž stejnorodosť prostoru vyjádřena.

(Annales de la Société scientifique de Bruxelles, tome XV. 1891, p. 8—11.)

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Zpráva cís. kr. realného a vyššího gymnasia v Kolíně za šk. rok 1891.
O některých sítích kartografických. Napsal *Václav Tlučhoř.* (46 stran a tabulka.)

Úřední instrukce pro vyučování mathematice na školách realných vyžadují, aby ve sférické trigonometrii dostalo se žákům poučení o sestrojování nejjednodušších a nejvíce užívaných sítí kartografických, spolu s výkladem jich nejdůležitějších vlastností. Nám se zdá, že větší část této úlohy náleží geometrii deskriptivní, a měli jsme již příležitosť (časopisu tohoto ročník XVII. str. 297) upozorniti na potřebu pojednání, které by stručně, se zřetelem k potřebě školské, vyložilo ve smyslu deskriptivní geometrie hlavní druhy kartografických sítí; neboť o těchto v našich českých učebnicích ani zmínky nenalezáme. Proto vítáme záslužnou práci, která podniknuta článkem svrchu jmenovaným.

V stručném úvodu naznačena krátce historie výzkumů o tvaru země a spůsobech jejího zobrazení, kteráž roztříděna