František Graf

O určení základních substitucí hypergeometrické grupy pomocí Wirtingerovy formule

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 1, 8--13

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123014`

řadou *)

$$f(x) = \sum_{c}^{\infty} \frac{\cos a^n x}{n!},$$

která má derivace všech stupňů, ale rozvoje v řadu Taylorovu nepřipouští.

Tímto poznatkem dán základ k rozdělení „mathematických“ funkcí ve dvě velké kategorie: ve funkce analytické, připouštějící rozvoj Taylorův (kategorie Lagrangeova), a ve funkce neanalytické, s konečným neb nekonečným počtem derivací, které Taylorova rozvoje nepřipouštějí.

Vzhledem k důležitosti předmětu pokládala redakce za účelné uveřejniti český překlad o této otázce jednajících statí M. Lerchových, který na její přání obstaral p. K. Čupr.

O určení základních substitucí hypergeometrické grupy pomocí Wirtingerovy formule.

Napsal dr. **František Graf** v Praze.

Pišme základní integrály hypergeometrické rovnice differenciální ve formě:

$$y_1 = \omega_1 \int_0^{\frac{1}{2}} \vartheta_0^{\alpha_0}(v, \tau)\, \vartheta_1^{\alpha_1}(v, \tau)\, \vartheta_2^{\alpha_2}(v, \tau)\, \vartheta_3^{\alpha_3}(v, \tau)\, dv$$

$$= \omega_1 \int_0^{\frac{1}{2}} f(v, \tau)\, dv$$

$$y_2 = \omega_1 \int_0^{\frac{\tau}{2}} \vartheta_0^{\alpha_0}(v, \tau)\, \vartheta_1^{\alpha_1}(v, \tau)\, \vartheta_2^{\alpha_2}(v, \tau)\, \vartheta_3^{\alpha_3}(v, \tau)\, dv$$

$$= \omega_1 \int_0^{\frac{\tau}{2}} f(v, \tau)\, dv.$$

*) Journal f. die reine und angew. Math., sv. 103, str. 136.

Exponenty α_i značí známé veličiny *)

$$-\lambda+\mu+\nu,\quad \lambda-\mu+\nu,\quad \lambda+\mu-\nu,\quad -\lambda-\mu-\nu$$

v libovolném pořadu a jich permutací obdržíme právě všech 24 známých řad. Poloviční perioda vyskytuje se před integrály následkem zavedení nehomogenního argumentu $v=\frac{u}{2\omega_1}$.

Integrály y_1 a y_2 jsou s elliptickými periodami $2\omega_1$, $2\omega_3$ homomorfní. Podrobíme-li tedy tyto základním substitucím kongruenční grupy druhého stupně

$$S(\tau)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\tau+2,$$

$$T(\tau)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{\tau}{1+2\tau},$$

doznávají formy y_1 a y_2 základní substituce grupy hypergeometrické.

Bude pak

$$\Theta_S y_1=\omega_1\int_0^{\frac{1}{2}} f(v,\tau+2)\,dv,\qquad \Theta_S y_2=\omega_1\int_0^{\frac{\tau+2}{2}} f(v,\tau+2)\,dv$$

a dále

$$\Theta_T y_1=(\omega_1+2\omega_3)\int_0^{\frac{1}{2}} f\left(v,\frac{\tau}{1+2\tau}\right)dv,$$

$$\Theta_T y_2=(\omega_1+2\omega_3)\int_0^{\frac{\tau}{2(1+2\tau)}} f\left(v,\frac{\tau}{1+2\tau}\right)dv.$$

Jest nám tedy nejprve udati hodnoty transformovaných funkcí $\vartheta_i(v,\tau)$ a sice ve formě logarithmické, ježto zde operujeme irracionálními mocnostmi. Tyto formule pro logarithmy thetafunkcí při transformaci druhého argumentu τ nebyly, pokud mi známo, doposud uveřejněny a ježto by nás jich odvození

*) Viz číslo IV. tohoto časopisu pg. 360.

vedlo příliš daleko, chci uvésti pro základní substituce přímo logarithmus integrandu:

$$lg\, f(v, \tau + 2) = lg\, f(v, \tau)$$

$$lg\, f\left(v, \frac{\tau}{1 + 2\tau}\right) = lg\, f((1 + 2\tau)\, v, \tau) - \frac{\pi i}{2}\, \alpha_0.$$

Z toho následuje:

$$\Theta_S y_1 = \omega_1 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(v, \tau)\, dv = y_1,$$

$$\Theta_S y_2 = \omega_1 \int\limits_0^{\frac{\tau+2}{2}} f(v, \tau)\, dv,$$

$$\Theta_T y_1 = \omega_1\, (1 + 2\tau)\, e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha_0} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f\big((1 + 2\tau)\, v, \tau\big)\, dv,$$

$$\Theta_T y_2 = \omega_1\, (1 + 2\tau)\, e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha_0} \int\limits_0^{\frac{\tau}{2(1+2\tau)}} f\big((1 + 2\tau)\, v, \tau\big)\, dv,$$

aneb, zavedeme-li v posledních dvou integrálech proměnnou $(1 + 2\tau)\, v$, při čemž integrační dráha zůstane přímou:

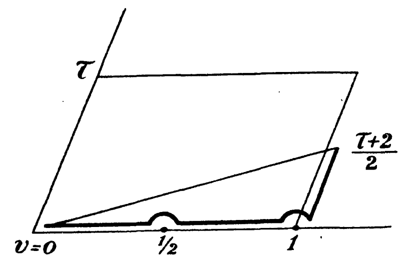
$$\Theta_T y_1 = \omega_1\, e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha_0} \int\limits_0^{\frac{1+2\tau}{2}} f(v, \tau)\, dv,$$

$$\Theta_T y_2 = \omega_1\, e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha_0} \int\limits_0^{\frac{\tau}{2}} f(v, \tau)\, dv = y_2 \,.\, e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha_0}.$$

Zbývá patrně určiti hodnoty integrálů:

$$\int\limits_0^{\frac{\tau+2}{2}} f(v, \tau)\, dv, \qquad \int\limits_0^{\frac{1+2\tau}{2}} f(v, \tau)\, dv.$$

Deformujme dráhu integrační tak, aby probíhala jen směrem reálné osy, resp. směrem vektoru τ, aniž bychom ovšem pře-



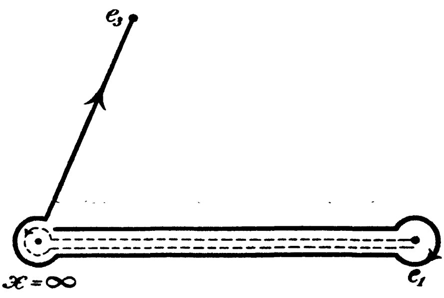
Obr. 1.

kročili nullový bod některé thetafunkce. Pro integrand platí podél dráhy relace:

$$f(1-\varepsilon) = f(\varepsilon)\, e^{-\pi i \alpha_2}, \qquad 0 \leqq \varepsilon \leqq \frac{1}{2},$$

$$f(1) = f(0)\, e^{-\pi i(\alpha_1+\alpha_2)},$$

které možno snadno geometricky odvoditi, předpokládáme-li, že

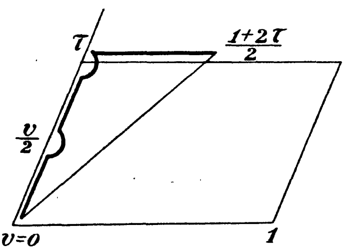


Obr. 2.

argument opíše lomenou dráhu v obrazci 1. vyznačenou. Z toho vyplývá:

$$\omega_1 \int_0^{\frac{\tau+2}{2}} f(v, \tau)\, dv = [1 - e^{-\pi i \alpha_1}]\, y_1 + e^{-\pi i(\alpha_1+\alpha_2)}\, y_2.$$

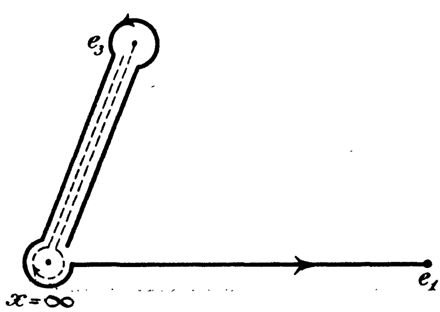
Znázorníme-li si dráhu integrační v rovině proměnné $x = p\,(2\omega_1 v)$, odpovídá případ tento oběhu bodu e_1 kolem $x = \infty$ ve smyslu kladném. (Obr. 2.) Základní integrály jsou tu vedeny od bodu $x = \infty$ k bodům $x = e_1$, resp. $x = e_3$.



Obr. 3.

Integrand druhý mění se podél své dráhy (obr. 3.) dle rovnic:

$$f(\tau - \varepsilon\tau) = f(\varepsilon\tau)\, e^{\pi i \alpha_0}$$
$$f(\tau) = f(0)\, e^{\pi i(\alpha_0 + \alpha_1)},$$



Obr. 4.

a z toho odvodíme:

$$\omega_1 \int_0^{\frac{1+2\tau}{2}} f(v, \tau)\, dv = (1 - e^{\pi i \alpha_0})\, y_2 + e^{\pi i(\alpha_0 + \alpha_1)}\, y_1.$$

Obr. 4. znázorňuje příslušnou dráhu v rovině x, kde bod e_3 vykoná oběh kolem $x = \infty$ ve smyslu záporném.

Základní substituce jsou tedy:

$$\begin{aligned}
\Theta_S y_1 &= y_1 \\
\Theta_S y_2 &= (1 - e^{-\pi i \alpha_2})\, y_1 + e^{-\pi i(\alpha_1+\alpha_2)}\, y_2, \\
\Theta_T y_1 &= e^{\pi i\left(\frac{\alpha_0}{2}+\alpha_1\right)}\, y_1 + e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha_0}\,(1 - e^{\pi i \alpha_0})\, y_2 \\
\Theta_T y_2 &= e^{-\frac{\pi i}{2}\alpha_0}\, y_2.
\end{aligned}$$

Kontrolu výsledku pomocí inversní substituce $(ST)^{-1}$ zde neuvádím ze zmíněných již důvodů; o logarithmech thetafunkcí při transformaci prvního a druhého argumentu hodlám obšírně pojednati při stanovení všeobecného zákona tvoření číselných koefficientů grupy hypergeometrické.

Kubická křivka racionálná jakožto souhrn dvojic konjugovaných bodů.

Píše dr. **B. Bydžovský.**

Souhrn bodů, z nichž se promítají tři obecně ležící dvojice bodů třemi dvojicemi paprsků v involuci, tvoří obecnou křivku stupně třetího C^3, na níž ony dvojice leží tvoříce dvojice bodů konjugovaných, t. j. takových, jichž tečny se protínají zase na čáře. Souhrn všech bodů konjugovaných promítá se z dvou libovolných konjugovaných bodů čáry involucemi projektivnými v poloze poloperspektivné, takové totiž, že té dvojici involuce v jednom bodu, jejíž jeden paprsek je spojnice obou bodů, odpovídá v druhé involuci dvojice, obsahující týž paprsek. Obě projektivné involuce vytvořují křivku stupně čtvrtého, jež se rozpadá v křivku kubickou C^3 a spojnici obou bodů.*)

Je tedy především patrno, že třemi dvojicemi konjugovaných bodů je C^3 úplně a jednoznačně stanovena; a lze užitím pouhého pravítka sestrojiti libovolné množství bodů této čáry.**) Je však dále patrno, že má-li C^3 takto určená míti dvojný bod, nesmějí ony tři dvojice ležeti zcela libovolně. Tuto věc objasníme v následujících řádcích, kde se vynasnažíme zároveň nalézti,

*) V. Schroeter, »Die Theorie d. eb. Kurven 3. O.« § 2.

**) V. Clebsch, Math. Ann. V., str. 422.