Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

O užití nauky o funkcích elliptických na odvození Dirichletových výsledků pro počet tříd forem kvadratických záporného diskriminantu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 1, 24--41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123012

7. Zvolíme-li pevnou K_1, necháme však K probíhati celý svazek $(a_1 a_2 b_1 b_2)$, je S_1 také pevna a S probíhá svazek. Každá S prochází totiž bodem c majíc v něm pevnou tečnu $\overline{cc_1}$; mimo to prochází body a_2, b_2, v němž je každá kuželosečka svazku protata paprskem $\overline{a_2 b_2}$. Svazek kuželoseček S, maje s S_1 společný pevný bod c a v něm tečnu, protíná S_1 v involuci. Tato involuce bodová je promítána z bodu c involucí paprskovou; i doplníme hořejší větu v ten smysl, že *spojnice obou dvojic průseků tvoří zase dvojici involuce paprskové.*

Dvojné paprsky této involuce snadno nalezneme. K svazku kuželoseček K náleží také oba zvrhlé elementy $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{a_2 b_2}$; $\overline{a_1 b_2}$, $\overline{a_2 b_1}$. Každý z nich má s K_1 společné dvě dvojice bodů splývajících; paprsky, které je spojují s bodem c, jsou tedy dvojné paprsky zmíněné involuce.

Je ostatně patrno, že tato involuce je projektivná se svazkem kuželoseček K; z toho plyne, že lze najíti průseky K_1 a K konstrukcemi kvadratickými. Při dané K_1 jsou dvojné elementy ihned známy; zároveň víme, které dvojice involuce jsou přidruženy zvrhlým elementům svazku kuželoseček K. Pro určitou K lze tedy nalézti dvojici involuce jí příslušnou a tím její průseky s K_1 dvěma kvadratickými konstrukcemi.

O užití nauky o funkcích elliptických na odvození Dirichletových výsledků pro počet tříd forem kvadratických záporného diskriminantu.

Napsal **K. Petr.**

V následujícím hodlám ukázati, jak z rozvojů pro funkce elliptické lze získati způsobem velice jednoduchým výsledky Dirichletovy týkající se počtu forem kvadratických záporného diskriminantu. Pokud mi známo, jest tato cesta v tomto problému téměř nepoužitá, ačkoliv jednotliví badatelé a to zvláště již Dirichlet sám, pak Kronecker a H. Weber*) odvodili takové vztahy mezi formami kvadratickými a funkcemi elliptickými, že jenom velmi málo bylo zapotřebí problém, o který právě běží, rozřešiti. Pouze Poincaré**) podal v poslední době takové odvození výsledků Dirichletových, že lze je snadno upraviti jako užití funkcí elliptických; avšak podává je opíraje se o methodu Dirichletovu, jež hlavně v tom spočívá, že se vyšetřuje řada konvergentní v okolí bodu, v němž přestává konvergovati. Dirichlet v té příčině zabýval se s řadou

$$\sum_x \sum_y \frac{1}{(ax^2 + bxy + cy^2)^{1+\varrho}}$$

v okolí bodu $\varrho = 0$ při $\varrho > 0$; Poincaré pak místo této řady s řadou

$$\sum_x \sum_y q^{ax^2+bxy+cy^2}$$

v okolí bodu $q = 1$. Takováto vyšetřování však pro úkol nadpisem vytknutý nutna nejsou a lze vynecháním jich při malých změnách řešení jeho podstatně jestě dále zjednodušiti, aniž bychom vybočovali při tom z oboru funkcí elliptických.

I.

Nejprve vyložím některé základní pojmy a nutné předpoklady z nauky o formách kvadratických. Co se označení tkne, budu se přidržovati citované práce Webrovy.

Kvadratickou formu budeme předpokládati ve tvaru

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

diskriminant této formy jest číslo

$$D = b^2 - 4ac.$$

---

*) *G. Lejeune-Dirichlet*, »Recherches sur diverses application de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, Crelleův Journal sv. XIX. a XXI., viz zvl. § 7.

L. Kronecker, Zur Theorie der elliptischen Funktionen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie v roce 1883 a v násl.

H. Weber, Zahlentheoretische Untersuchungen aus dem Gebiete der elliptischen Functionen; Nachrichten von der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen z roku 1893.

**) *H. Poincaré*, »Sur les invariants arithmétiques«. Journal für reine und ang. Math. svazek 129, r. 1905, str. 89.

Diskriminantem (takto definovaným) nemůže býti každé číslo; jest patrno, že diskriminant jest číslo dle modulu 4 buď $\equiv 0$ anebo $\equiv 1$.

Diskriminant, který není dělitelný čtvercem žádného čísla tak, aby po odloučení tohoto faktoru zbylé číslo bylo tvaru diskriminantního, sluje hlavní diskriminant (Stammdiskriminante). (Tak ku př. diskriminanty 5, 12, — 3 jsou hlavní diskriminanty; — 12 není hlavní diskriminant, neboť $-12 = -3 \cdot 2^2$.) V následujícím budeme se zabývati *toliko formami o hlavních diskriminantech.* (Formy kvadratické, jež nemají za diskriminant hlavní diskriminant, dostáváme, jak snadno lze dokázati, z forem o hlavním diskriminantu pomocí lineární substituce.)

Budiž dále

$$\left(\frac{m}{p}\right)$$

Legendreův symbol. Tento značí, — jak známo z elementů nauky o číslech —, je-li p prvočíslo nedělící m, $+1$ anebo -1 dle toho, jestli m kvadratický zbytek modulu p či ne. Na základě tohoto symbolu definuje Weber l. c. nový symbol těmito rovnicemi (D jest v nich diskriminant):

$$(D, n) \cdot (D, n') = (D, n \cdot n'), \tag{1}$$

$$(D, 1) = 1, \quad (D, 0) = 0, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}(D, -1) &= +1, \text{ když } D > 0;\\ &= -1, \text{ když } D < 0.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$(D, 2) = (-1)^{\frac{D^2-1}{8}}, \text{ jestliže } D \text{ liché}, \tag{4}$$

$$(D, p) = \left(\frac{D}{p}\right), \text{ není-li } D \text{ dělitelno lichým prvočíslem } p, \tag{5}$$

$$(D, q) = 0, \text{ je-li } D \text{ dělitelno prvočíslem } q. \tag{6}$$

Těmito rovnicemi jest symbol (D, n) jednoznačně ustanoven; symbol ten jest vlastně do jisté míry rozšíření Legendreova symbolu, jež započato bylo již Jacobim. Pro symbol právě definovaný platí tyto věty

$$(D, n)\ (D', n) = (DD', n), \tag{7}$$

$$(D, n) = \pm (D', n), \text{ když } D \equiv D' \ (\text{mod. } 4n), \tag{8}$$

horní znaménko platí, jestliže z obou čísel DD', n aspoň jedno jest kladné, jinak dolní.

$$(D, n) = (D, n'), \quad \text{jestliže} \quad n \equiv n' \pmod{D}. \qquad (9)$$

Co se důkazu těchto vět tkne, odkazuji k citovanému pojednání Webrovu, čtenář tam najde rovněž algorithmus pro výpočet symbolu (D, n) podobný známému algorithmu pro výpočet

$$\left(\frac{m}{n}\right).$$

Kvadratická forma $ax^2 + bxy + cy$ vyjadřuje číslo N, lze-li stanoviti čísla celá α, γ taková, aby

$$a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 = N.$$

Pro následující jest důležité znáti větu pro počet různých vyjádření daného čísla N danou formou. Tuto větu lze stanoviti elementárnými methodami z počtu řešení shody*)

$$z^2 \equiv D \pmod{4N}.$$

Dostáváme pak tento výsledek (při supposici, že D jest hlavní diskriminant):

Vezmeme-li z každé třídy forem o diskriminantu hlavním D (záporném a s kladnými krajními koefficienty) jednu formu (jeden „representant"), jest počet vyjádření čísla N (kladného) těmito formami dán součtem

$$\mu \sum_d (D, d), \qquad (10)$$

kde součet se vztahuje na všecky dělitele d čísla N. Při tom jest $\mu = 2$ vyjma, že $D = -4$, resp. že $D = -3$, kdy $\mu = 4$, resp. $= 6$. Jedině tento výsledek budeme předpokládati z nauky o kvadratických formách.

II.

Na druhém místě uvedu potřebná označení a formule z nauky o funkcích elliptických. Thetafunkce s charakteristikami (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0) označovati budu**) po řadě $\Theta(v)$,

---

*) Viz o tom M. Lerch, Arithmetické odvození Lejeune-Dirichletových výsledků o počtu tříd kvadratických forem. Rozpravy české Akad., ročník VII. č. 5.

**) dle C. Jordana, Cours d'Analyse, t. II, 2. vyd.

$\Theta_1(v)$, $\Theta_2(v)$, $\Theta_3(v)$. Značí tedy ku př.

$$\Theta_3(v) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} \cos 2n\pi v, \qquad q = e^{\pi i \tau};$$

Θ_1, Θ_2, Θ_3 nechť značí hodnoty thetafunkcí $\Theta_1(v)$, $\Theta_2(v)$, $\Theta_3(v)$ pro $v = 0$. $\Theta'(v)$ znamenejž derivaci funkce $\Theta(v)$ dle v.

Základní důležitost mají pro nás formule transformační a to pouze pro transformaci

$$\left(\tau, -\frac{1}{\tau}\right).$$

Jsou to tyto vzorce, (kde za znaménkem funkčním vytčen mimo v též druhý argument, na němž funkce závisí):

$$\Theta\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{i\sqrt{i}} e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \Theta(v, \tau), \tag{11}$$

$$\Theta_3\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}} e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \Theta_3(v, \tau), \tag{12}$$

$$\Theta_1\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}} e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \Theta_2(v, \tau), \tag{13}$$

$$\Theta_2\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}} e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \Theta_1(v, \tau). \tag{14}$$

$\sqrt{\tau}$ jest ta odmocnina τ, jejíž reálná i imaginárná část jest kladná (τ, jak známo, má imaginárnou část positivnou);

$$\sqrt{i} = e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

Z formulí těchto plyne při $v = 0$ ku př.

$$\Theta_3\left(o, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}} \Theta_3(o, \tau).$$

Výsledek tento se dá snadno zevšeobecnit (jak to učinil Kronecker l. c. a jak také zcela obecně provádí Weber l. c.). Provedu toto zevšeobecnění pro nás důležité způsobem od Kroneckra naznačeným. Vypišme formuli pro transformaci funkce $\Theta_3(v)$;

značíme-li $\tau_1 = -\frac{1}{\tau}$, můžeme ji psáti ve tvaru

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau k^2 + 2k\pi i v} = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} e^{\pi i v^2 \tau_1} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau_1 k^2 - 2k\pi i v \tau_1},$$

anebo také ve tvaru

$$= \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} e^{\pi i v^2 \tau_1} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau_1 k^2 + 2k\pi i v \tau_1}.$$

Užijeme první z těchto formulí na

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (am^2 + bmn)}, \qquad a > 0,$$

kladouce v ní místo τ, resp. v čísla $a\tau$, resp. $\frac{1}{2} b\tau n$. I dostaneme

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (am^2 + bmn)} = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{a\tau}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i}{a}\left(\tau_1 m^2 + bmn - \frac{1}{4}\tau b^2 n^2\right)}.$$

Z této identičnosti dosazením do dvojné řady plyne ihned (při $D < 0$)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (am^2 + bmn + cn^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{a\tau}} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i}{a}\left(\tau_1 m^2 + bmn - \frac{\tau}{4} Dn^2\right)}.$$

Užijeme-li podobným způsobem druhou ze svrchu uvedených formulí transformačních na řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{\pi i}{a}\left(-\frac{\tau}{4} Dn^2 + bmn\right)},$$

dostaneme dosazením do pravé strany rovnice právě napsané (majíce při tom náležitý zřetel ku znaménku, jak nahoře bylo uvedeno)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (am^2 + bmn + cn^2)}$$

$$= \frac{i}{\tau \sqrt{-\frac{D}{4}}} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{4\pi i \tau_1}{-D}(am^2 + bmn + cn^2)},$$

kterýžto výsledek napíšeme ve tvaru poněkud změněném (za τ, τ_1 substituováno $\frac{2\tau}{-D}$, $\frac{1}{2}\tau_1 D$)

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i\tau}{-D}(am^2+bmn+cn^2)} \tag{15}$$
$$=\frac{i\sqrt{-D}}{\tau}\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\tau_1(am^2+bmn+cn^2)}.$$

Rozvoj z nauky o funkcích elliptických, o nějž se budu opírati, jest*)

$$\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}=\pi\cot\pi v+4\pi\sum_1^{\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v. \tag{16}$$

Funkce

$$\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}=\frac{d\log\Theta(v)}{dv}$$

jest použita rovněž v citované Webrově práci, jakož i transformační vzorec této funkce plynoucí bezprostředně derivováním logarithmů obou stran rovnice (11). Máme

$$\frac{1}{\tau}\frac{\Theta'\left(\frac{v}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)}{\Theta\left(\frac{v}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)}=\frac{2v\pi i}{\tau}+\frac{\Theta'(v,\tau)}{\Theta(v,\tau)},$$

anebo jednoduchou záměnou (za τ psáti τ_1 a naopak)

$$\frac{\Theta'(v\tau,\tau)}{\Theta(v\tau,\tau)}+2v\pi i=\frac{1}{\tau}\frac{\Theta'(v,\tau_1)}{\Theta(v,\tau_1)}. \tag{17}$$

III.

Přistoupím k vlastnímu úkolu své práce. K tomu účelu postačí dosaditi do poslední rovnice po řadě za v $\frac{1}{D}$, $\frac{2}{D}$, ... $\frac{-D-1}{D}$ příslušné rovnice tak vzniklé násobiti po řadě $(D, 1)$,

*) viz ku př. C. Jordan, Cours d'Analyse, t. II, vyd. 2., str. 453.

$(D, 2), \ldots (D, -D-1)$ a utvořiti součet. Dostaneme tak vztah

$$\sum_k (D, k)\left(2\frac{k}{D}\pi i + \frac{\Theta'\left(\frac{k\tau}{D}, \tau\right)}{\Theta\left(\frac{k\tau}{D}, \tau\right)}\right) = \frac{1}{\tau}\sum_k (D, k)\frac{\Theta'\left(\frac{k}{D}, \tau_1\right)}{\Theta\left(\frac{k}{D}, \tau_1\right)}, \quad (18)$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad -D-1.$$

Výraz na pravé straně vypočten jest ve práci Webrově (l. c.); jenom že při výpočtu toho výrazu tam předpokládány jednak výsledky Dirichletovy pro počet tříd při záporném diskriminantu, jednak stanovení tak zvaných součtů Gaussových. Obojí však lze z rovnice (18) odvoditi a současně pravou stranu té rovnice ustanoviti, započneme-li s výpočtem výrazu na levé straně její. Jest viděti na tom opětně, jak častokráte *zdánlivě* plané změny mohou míti důležité důsledky. Nejprve provedu substituci do prvého členu rozvoje (16), do $\pi \cot \pi v$.

$$\pi \cot \frac{k\pi\tau}{D} = +\pi i \frac{1 + e^{\frac{2k\pi i\tau}{|D|}}}{1 - e^{\frac{2k\pi i\tau}{|D|}}} = \pi i\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} q^{\frac{2km}{|D|}}\right).$$

Podobně dosazením do

$$4\pi \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi v = -2i\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\left(e^{2m\pi i v} - e^{-2m\pi i v}\right)$$

dostáváme

$$-2i\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\left(q^{-\frac{2km}{|D|}} - q^{\frac{2km}{|D|}}\right) = -2i\sum_{\lambda=1}^{\infty} q^{\frac{2m(\lambda|D|-k)}{|D|}}$$
$$+ 2i\sum_{\lambda=1}^{\infty} q^{\frac{2m(\lambda|D|+k)}{|D|}}.$$

Uvážíme-li pak, že ve tvaru $\lambda|D| - k$, kde $\lambda = 1, 2, \ldots$ a $k = 1, 2, \ldots, -D-1$ jest obsaženo každé číslo nehledě k násobkům $|D|$ jednou a jenom jednou a rovněž tak ve tvaru $\lambda D + k$, kde $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots$; a uvážíme-li, že dle vztahů (1), (3), (6), (9)

$$(D, k) \,.\, -2iq^{\frac{2m(\lambda|D|-k)}{|D|}} = +2i(D, \lambda|D| - k)\,q^{\frac{2m(\lambda|D|-k)}{|D|}},$$

$$(D, k) \,.\, 2iq^{\frac{2m(\lambda|D|+k)}{|D|}} = 2i(D, \lambda|D| + k)\,q^{\frac{2m(\lambda|D|+k)}{|D|}},$$

$$(D, \lambda|D|) = 0,$$

můžeme výraz na levé straně (18) psáti

$$-\frac{2\pi i}{|D|}\Sigma(D,k)k+\pi i\Sigma(D,k)+4\pi i\sum_{m}\sum_{m'}(D,m')q^{\frac{2mm'}{|D|}},$$

$$m,\ m'=1,2,3,\ldots,\quad k=1,2,\ldots,\quad -D-1;$$

aneb také ve tvaru, (vynecháme-li současně druhý člen, jenž, jak známo a jak také doleji poznáme, jest rovný nulle,)

$$-\frac{2\pi i}{|D|}\Sigma(D,k)k+4\pi i\sum_{N}\left(q^{\frac{2N}{|D|}}\sum_{d}(D,d)\right),\qquad (19)$$

$$N=1,2,3,\ldots,\quad k=1,2,\ldots,\quad -D-1;$$

d znamená po řadě všecky dělitele čísla N.

Užijeme-li věty o počtu vyjádření čísla N všemi formami o diskriminantu D pro ten případ, že D není ani -4, ani -3 (tedy $\mu=2$), plyne ihned pro (19) tento výraz

$$-\frac{2\pi i}{|D|}\Sigma(D,k)k+2\pi i\sum_{x,y}{}'\sum_{tř.}q^{\frac{2(ax^2+bxy+cy^2)}{|D|}},$$

$$x,\ y=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots,$$

vyjmouti jest toliko při sčítání případ, kdy x a y současně stávají se nullou, což vyznačeno čárkou u znaménka součtového, druhé znaménko součtové v druhém členu vztahuje se ku všem třídám forem daného diskriminantu, z každé třídy lze zvoliti libovolně jeden representant. Dvojici $x=0$, $y=0$ při sčítání v druhém členu netřeba vyjímati, přidáme-li k druhému členu tolik jednotek násobených $2\pi i$, kolik jest tříd; budiž jich h; i lze pak psáti (19) takto

$$-\frac{2\pi i}{|D|}\Sigma(D,k)k-2h\pi i+2\pi i\sum_{x,y}\sum_{tř.}q^{\frac{2(ax^2+bxy+cy^2)}{|D|}}.$$

Zaveďme ještě místo čísla $q=e^{\pi i\tau}$ číslo $q_1=e^{\pi i\tau_1}$ používajíce transformační rovnice (15), a máme konečně pro levou stranu (18) tento výsledek

$$-2\pi i\left(h+\frac{1}{|D|}\sum_{k}(D,k)k\right)-2\pi\frac{\sqrt{-D}}{\tau}\sum_{x,y}\sum_{tř.}q_1^{2(ax^2+bxy+cy^2)}.\qquad (20)$$

Tvrdím nyní, že jest nutně

$$-2\pi i\left(h+\frac{1}{|D|}\Sigma(D,k)k\right)=0.$$

Neboť kdyby tomu tak nebylo, pak by z rovnice (18) se zřetelem ku vyjádření levé strany její pomocí (20) vyplývalo, že τ jest rovno potenční řadě o argumentu q_1; to jest však nemožno, neboť $\tau = -\frac{\pi i}{log\, q_1}$ a tento výraz nelze rozvinouti v řadu postupující dle celistvých mocností proměnné q_1 a konvergentní v kruhu o poloměru rovném 1. Že pravá strana rovnice (18) jest potenční řadou argumentu q_1 násobenou $-\frac{1}{\tau}$, jest na základě (16) bezprostředně jasno *).

I dostáváme nejprve tento výsledek pro počet tříd kvadratických záporného diskriminantu

$$h = -\frac{1}{|D|}\Sigma(D, k)k, \quad k = 1, 2, \ldots, -D-1. \qquad (21)$$

V tomto výsledku zahrnuty jsou, (viz odst. V.), příslušné výsledky Dirichletovy. Pomocí pravé strany dostáváme ihned pro totéž číslo:

$$h = \frac{1}{2\sqrt{-D}}\Sigma(D, k)\, cot\, \frac{\pi k}{|D|}. \quad k = 1, 2, \ldots, -D-1 \qquad (22)$$

Kdybychom byli do rovnice (17) dosazovali za v čísla $\frac{1}{D}$, $\frac{2}{D}, \ldots \frac{E\left(-\frac{D}{2}\right)}{D}$ a postupovali jako svrchu, dospěli bychom, jak snadno patrno, rovněž k výsledkům pro počet tříd a to těmto

$$h = \Sigma_{\nu}(D, \nu) - \frac{2}{|D|}\Sigma_{\nu}(D, \nu)\nu, \qquad (23)$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{-D}}\Sigma_{\nu}(D, \nu)\, cot\, \frac{\pi\nu}{|D|}, \qquad (24)$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, E\left(\frac{-D}{2}\right).$$

---

*) Větu z theorie funkcí, že $\frac{1}{log\, x}$ není funkcí analytickou uvnitř kruhu $|x| < 1$ v bodě $x = 0$, nebylo by třeba k důkazu přibírati, kdybychom předpokládali známost součtů Gaussových; znajíce Gaussovy součty vypočetli bychom pravou stranu (18) stejně, jako jsme to učinili s levou, porovnáním obou stran bychom pak dostali rovnici tvaru

$$A\tau = B,$$

kde A a B jsou čísla nezávislá na proměnné τ; to však jest nemožno, leda že $A = 0$, $B = 0$.

Opakuji, že výsledky (21), (22), (23), (24) platny jsou pro diskriminanty hlavní, různé od -4 a od -3. Aby platny byly i pro tyto diskriminanty, bylo by nutno násobiti pravé strany číslem $\frac{\mu}{2}$ (viz výraz (10)) anebo, což jest totéž, počítati formu $x^2 + y^2$ (resp. formu $x^2 + xy + y^2$) s váhou $\frac{1}{2}$ $\left(\text{resp. s váhou } \frac{1}{3}\right)$. *)

Že z rovnice (18) plynou výrazy pro Gaussovy součty, jest rovněž dle předcházejícího jasno. Stačí porovnati koefficienty stejných mocností čísla q_1 na obou stranách. Tak q_1^2 násobeno jest na levé straně (dle (10) a (20)) výrazem

$$-\frac{4\pi}{\tau}\sqrt{-D},$$

na pravé straně pak výrazem

$$\frac{4\pi}{\tau}\sum_k (D, k) \sin\frac{2k\pi}{D}, \quad k = 1, 2, \ldots, -D-1,$$

i jest tedy

$$\sum_k (D, k) \sin\frac{2k\pi}{D} = -\sqrt{-D}, \qquad D < 0. \tag{25}$$

Kdybychom porovnali nyní koefficienty čísel q_1^{2m}, kde m jest

---

*) Z výrazu (21) resp. (24), (jichž totožnost ostatně dle (27) přímo vyplývá), dostali bychom úvahami arithmetickými tyto jednodušší

při D lichém $\qquad (2 - (D, 2))\, h = \sum_\nu (D, \nu)$;

při D sudém $\qquad h = \sum_\mu (D, \mu)$;

$$\nu = 1, 2, \ldots E\frac{-D}{2}; \quad \mu = 1, 2, \ldots -\frac{D}{4}.$$

Viz Weber l. c. *M. Lerch* v pojednání »Sur quelques formules relatives au nombre des classes« (Bull. des sc. math., t. 21, rok 1897) transformuje výraz (21) (avšak ne arithmeticky) a dospívá ku formulím ještě jednodušším. Ku př. uvádím vzorec

$$\frac{1}{2}\left[1 - (D, 2) - (D, 3) + (D, 4)\right] h = \sum_\varrho (D, \varrho),$$

$$\varrho = E\frac{-D}{4} + 1,\ E\frac{-D}{4} + 2, \ldots E\frac{-D}{3},$$

platný v každém případě a stanovící h, jestliže $(D, 2) + (D, 3) < 2$.

prvočíslo, pak součin dvou prvočísel, a t. d., dospěli bychom postupně k rovnici

$$\sum_k (D, k) \sin \frac{2km\pi}{D} = -(D, m)\sqrt{-D}, \quad D < 0. \tag{26}$$

Poněvadž

$$(D, k) = -(D, |D| - k), \tag{27}$$

při $D < 0$, jest v tomto případě bezprostředně jasno, že

$$\sum_k (D, k) \cos \frac{2km\pi}{D} = 0, \quad D < 0. \tag{28}$$

Gaussovy součty odvozeny pro případ, že $D < 0$, vzorce však platné i pro $D > 0$ plynou bez potíže známým způsobem ze vzorců právě odvozených a vět pro symbol (D, k).

Rovněž okamžitě jest patrno ze (27), že

$$\sum_k (D, k) = 0; \quad k = 0, 1, \ldots, \quad -D-1,$$

kterážto rovnice nahoře byla předpokládána.

Z rovnice (18) a výsledků pro levou stranu dosažených vyplývá konečně vztah

$$\sum_k (D, k) \frac{\Theta'\left(\frac{k}{D}\right)}{\Theta\left(\frac{k}{D}\right)} = -\frac{4\pi}{\mu}\sqrt{-D} \sum_{x,y\ tř.}\sum q^{2(ax^2+bxy+cy^2)},$$

$$x, y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Rovnici tuto uvádí Weber (l. c); Kronecker však již dříve odvodil rovnice příbuzné, poněkud ještě obecnější.

IV.

Lejeune-Dirichlet udává při záporných diskriminantech poněkud jiné výrazy pro počet tříd a rozeznává tu celkem 6 různých případů, dle toho, je-li diskriminant dělitelný čtyřmi či ne a dle tvaru modulu 4 (resp. mod. 8) největšího lichého čísla, jež dělí diskriminant. V každém z těchto šesti případů pak dává jinou formuli. Formule tyto sloučiti v jedinou podařilo se Kroneckrovi a to tím, že pro kvadratickou formu místo obvyklého a hlavně Gaussem užívaného tvaru $ax^2 + 2bxy + cy^2$

(kde $b^2 - ac$ nazývalo se diskriminantem) užívá se tvaru $ax^2 + bxy + cy^2$.

Nebylo by nesnadno — předpokládajíce některý ze šesti shora vzpomenutých případů pro diskriminant kvadratické formy — získati výsledky poněkud jednodušší nežli jest výsledek obecný. Provedu to na příklad, když diskriminant $D = -4P$ a $P \equiv 1$ mod. 4. (druhý to případ u Lejeune-Dirichleta při formách o záporném diskrimantu). Při tom dostaneme zároveň výrazy zajímavé i se stanoviska theorie elliptických funkcí. Při formách, jichž diskriminant jest dělitelný 4, poslouží nám rozvoj *)

$$\Theta_1 \Theta_3 \frac{\Theta_2(v)}{\Theta(v)} = \frac{1}{\sin \pi v} + 4 \sum_n \sum_m q^{(2n-1)m} \sin (2n - 1) \pi v; \qquad (m)$$

$$m, n = 1, 2, 3 \ldots$$

Počet vyjádření čísla N pomocí representantů všech tříd kvadratických forem o diskriminantu $D = -4P$, $P \equiv 1$ (mod. 4) jest dán výrazem

$$2 \sum_d (-1)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d}{P}\right), \qquad (n)$$

kde $\left(\frac{d}{P}\right)$ jest Legendre-Jacobiův symbol a kde součet vztahuje se na všecky *liché* dělitele čísla N (při tom výraz ten jest násobiti ještě 2, když $P = 1$). Vzorec pro Gaussův součet (který zde pro jednoduchost jako známý již předpokládán), jest v tomto případě

$$\sum \left(\frac{k}{P}\right) \cos \frac{2kh\pi}{P} = \left(\frac{h}{P}\right) \sqrt{P}; \qquad (p)$$

$$k = 1, 2, \ldots, P - 1.$$

Vidíme pak ihned, že k našemu účelu postačí v rozvoji (m) místo v nejprve psáti $v + \frac{1}{2}$; tu plyne

$$\Theta_1 \Theta_3 \frac{\Theta_3(v)}{\Theta_1(v)} = \frac{1}{\cos \pi v} + \sum_m \sum_n (-1)^n q^{(2n-1)m} \cos (2n - 1) \pi v; \qquad (q)$$

$$m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

a dosazovati za v po řadě $\frac{2}{P}, \frac{4}{P}, \frac{6}{P}, \ldots \frac{2(P-1)}{P}$; rov-

---

*) Viz ku př. C. Jordan, l. c., str. 452.

nice tak vzniklé pak násobiti $\left(\frac{1}{P}\right), \left(\frac{2}{P}\right), \ldots \left(\frac{P-1}{P}\right)$ a sčítati. Dostaneme

$$\Theta_1 \Theta_3 \sum_k \left(\frac{k}{P}\right) \frac{\Theta_3\left(\frac{2k}{P}\right)}{\Theta_1\left(\frac{2k}{P}\right)} = \sum_k \left(\frac{k}{P}\right) \frac{1}{\cos\frac{2k\pi}{P}}$$

$$+ 4\sqrt{P} \sum_N \left(\sum_d (-1)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d}{P}\right)\right) q^N; \qquad (r)$$

$$k = 1, 2, 3 \ldots, P-1;$$
$$N = 1, 2, 3 \ldots$$

d má význam týž jako v (n). Vybereme-li si z každé třídy forem kvadratických o diskriminantu $-4P$ po jednom representantu, jejž psáti budeme ve tvaru $ax^2 + 2bxy + cy^2$, můžeme rovnici, majíce zřetel ku (n), (r) také psáti takto

$$\Theta_1 \Theta_3 \sum_k \left(\frac{k}{P}\right) \frac{\Theta_3\left(\frac{2k}{P}\right)}{\Theta_1\left(\frac{2k}{P}\right)} = 2 \sum_{tř} \sum_{x,y} q^{ax^2+2bxy+cy^2}; \qquad (p)$$

$$x, y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Při tom způsobem týmž, jako v odst. III., uzavírali jsme i tu, že počet tříd diskriminantu $-4P$ jest

$$h = \frac{1}{2\sqrt{P}} \sum_k \left(\frac{k}{P}\right) \frac{1}{\cos\frac{2k\pi}{P}}, \quad k = 1, 2, \ldots P-1.$$

Jiný v podstatě výsledek dostaneme pro h, provedeme-li na levou stranu rovnice (p) lineárnou transformaci $\left(\tau, -\frac{1}{\tau}\right)$ a výraz vzniklý rozvineme v řadu potenční o argumentu q. Z formulí transformačních (12, 13, 14) plyne

$$\Theta_2(o, \tau)\, \Theta_3(o, \tau) \frac{\Theta_3(v\tau, \tau)}{\Theta_2(v\tau, \tau)} = -i\tau_1\, \Theta_1(o, \tau_1)\, \Theta_3(o, \tau_1) \frac{\Theta_3(v, \tau_1)}{\Theta_1(v, \tau_1)}.$$

I jest patrno, že běží o výpočet rozvoje postupujícího dle stoupajících mocnin čísla q při výrazu

$$\Theta_2(o,\tau)\,\Theta_3(o,\tau)\sum_k\left(\frac{k}{P}\right)\frac{\Theta_3\left(\frac{2k\tau}{P},\tau\right)}{\Theta_2\left(\frac{2k\tau}{P},\tau\right)},\quad k=1,2,\dots P-1,\qquad (t)$$

vlastně o výpočet členu nezávislého na q v tom rozvoji. Při tom použijeme známé řady

$$\Theta_2\Theta_3\frac{\Theta_3(v,\tau)}{\Theta_2(v,\tau)}=1+4\frac{q}{1+q^2}\cos 2\pi v$$
$$+4\frac{q^2}{1+q^4}\cos 4\pi v+\dots$$

Při substituci jest však míti na mysli, že rozvoj tento není konvergentní pro $v=\frac{2k\tau}{P}$, když $k>\frac{1}{4}P$. Abychom dostali konvergentní rozvoje i v těchto případech, stačí použíti formulí

$$\Theta_2\Theta_3\frac{\Theta_3(v-\tau)}{\Theta_2(v-\tau)}=-\Theta_2\Theta_3\frac{\Theta_3(v)}{\Theta_2(v)}=-\Theta_2\Theta_3\frac{\Theta_3(v-2\tau)}{\Theta_2(v-2\tau)}.$$

A tak obdržíme pro první člen rozvoje výrazu (t) na q nezávislý, píšeme-li $P=4\varrho+1$, toto číslo

$$\sum_{k=1}^{\varrho}\left(\frac{k}{P}\right)-\sum_{\varrho+1}^{2\varrho}\left(\frac{k}{P}\right)-\sum_{2\varrho+1}^{3\varrho}\left(\frac{k}{P}\right)+\sum_{3\varrho+1}^{4\varrho}\left(\frac{k}{P}\right),$$

které jest rovno rovněž jako prvý člen pravé strany rovnice (r) dvojnásobnému počtu tříd diskriminantu $-4P$. Výsledky, jež jsme obdrželi pro počet tříd, lze ještě zjednodušiti pomocí vztahu $\left(\frac{k}{P}\right)=\left(\frac{P-k}{P}\right)$ platném při $P\equiv 1$, (mod. 4). A tak máme konečně tuto větu: Počet tříd forem kvadratických o diskriminantu $-4P=-4\,(4\varrho+1)$ jest dán těmito vzorci

$$h=\frac{1}{\sqrt{P}}\sum\left(\frac{k}{P}\right)\frac{1}{\cos\frac{2k\pi}{P}},\quad k=1,2,\dots 2\varrho$$

$$h=\sum_{k=1}^{\varrho}\left(\frac{k}{P}\right)-\sum_{k=\varrho+1}^{2\varrho}\left(\frac{k}{P}\right)=2\sum_{1}^{\varrho}\left(\frac{k}{P}\right).$$

V.

Vzorec odstavce přicházejícího pro počet tříd v tom případě, že $D = -4(4\varrho + 1)$ odvozený dá se pomocí snadných úvah arithmetických již Gaussovi známých (viz Gauss-Werke, sv. II., str. 287.—291.) zevšeobecniti a to připínáme-li přímo ku formulím odstavce III. Odtud plyne že počet tříd násobený $2\pi i$ dostaneme, dosazujeme-li do $2v\pi i$ za v čísla $\frac{1}{D}, \frac{2}{D}, \ldots, \frac{-D-1}{D}$ a výsledky násobené po řadě $(D, 1), (D, 2), \ldots, (D, -D-1)$ sečteme.

Budiž hlavní diskriminant D součin dvou diskriminantů $D = D_1 D_2$. Jedno z čísel D_1 a D_2 jest záporné, druhé kladné a poněvadž D jest hlavní diskriminant, jsou obě bez společné míry. I jest z toho patrno, že řada

$$\frac{0}{D_1 D_2}, \frac{1}{D_1 D_2}, \frac{2}{D_1 D_2}, \frac{3}{D_1 D_2}, \ldots, \frac{-D_1 D_2 - 1}{D_1 D_2} \tag{u}$$

shoduje se (nehledě ku pořádku členů) s řadou

$$\frac{k_1}{D_1} + \frac{k_2}{D_2} - \varepsilon_{k_1, k_2}; \qquad \begin{aligned} k_1 &= 0, 1, 2, \ldots, |D_1| - 1, \\ k_2 &= 0, 1, 2, \ldots, |D_2| - 1; \end{aligned} \tag{v}$$

$\varepsilon_{k_1,k_2} = 0$, jestliže $\frac{k_1}{D_1} + \frac{k_2}{D_2} < 0$, $\varepsilon_{k_1,k_2} = 1$, jestliže

$$\frac{k_1}{D_1} + \frac{k_2}{D_2} > 0.$$

Neboť číslo (v) jest jednomu členu řady (u) jistě rovno a dvě z čísel $k_1 D_2 + k_2 D_1 - \varepsilon_{k_1,k_2} D_1 D_2$ nemohou býti shodna dle modulu $D_1 D_2$. Počet pak členů v řadách (u) a (v) jest týž.

Tedy místo, abychom dosazovali do $2v\pi i$ členy řady (u), můžeme dosazovati členy řady (v), při čemž budeme člen ve (v) násobiti číslem

$$(D_1 D_2, \; k_1 D_2 + k_2 D_1 - \varepsilon_{k_1,k_2} D_1 D_2).$$

Avšak

$$\begin{aligned} (D_1 D_2, k_1 D_2 + k_2 D_1 - \varepsilon_{k_1,k_2} D_1 D_2) &= (D_1, k_1 D_2)(D_2, k_2 D_1) \\ = (D_1, k_1)(D_2, k_2)(D_1, D_2)(D_2, D_1) &= (D_1, k_1)(D_2, k_2) \end{aligned}$$

(dle vět pro symbol (D, m) svrchu uvedených, přibereme-li k nim relaci ze zákona reciprocity plynoucí $(D_1 . D_2) = (D_2, D_1)$, platnou pro ten případ, že aspoň jeden z diskriminantů D_1, D_2 jest kladný).

I jest tedy počet tříd

$$h = \sum_{k_1, k_2} (D_1, k_1)(D_2, k_2)\left(\frac{k_1}{D_1} + \frac{k_2}{D_2} - \varepsilon_{k_1, k_2}\right);$$

$$k_1 = 1, 2, \ldots |D_1| - 1; \quad k_2 = 1, 2, \ldots |D_2| - 1;$$

anebo vynecháme-li členy, jichž součet jest se zřetelem ku $\sum_{k_1}(D_1, k_1) = 0$, $\sum_{k_2}(D_2, k_2) = 0$,

$$h = -\sum_{k_1, k_2} (D_1, k_1)(D_2, k_2)\,\varepsilon_{k_1, k_2}. \qquad (w)$$

Objasním užití této formule na příkladě. Budiž $D = -7 . P$, kde P jest kladné liché číslo nedělitelné 7 (a tedy $\equiv 1$ mod. 4). Pak můžeme klásti $D_1 = -7$, $D_2 = P$, a zároveň jest pomocí Legendre-Jacobi-ova symbolu

$$(D_1, k_1) = \left(\frac{k_1}{7}\right), \quad (D_2, k_2) = \left(\frac{k_2}{P}\right).$$

Aby $\varepsilon_{k_1, k_2} = 1$, musí, jak snadno dle definice tohoto čísla poznáváme, býti k_2 větší nežli $\frac{Pk_1}{7}$ a menší nežli P, jinak jest $\varepsilon_{k_1, k_2} = 0$. I jest pro $D = -7P$ počet tříd rovný součtu

$$-\sum_{k_1}\left(\frac{k_1}{7}\right) \cdot \left[\sum_{k_2}\left(\frac{k_2}{P}\right)\right]; \quad \begin{array}{l} k_1 = 1, 2, 3, \ldots 6. \\ k_2 = E\frac{Pk_1}{7} + 1,\ E\frac{Pk_1}{7} + 2, \ldots P. \end{array}$$

Označíme-li

$$s_{k_1} = \sum_k \left(\frac{k}{P}\right); \quad k = E\frac{Pk_1}{7} + 1,\ E\frac{Pk_1}{7} + 2, \ldots E\frac{P(k_1+1)}{7},$$

můžeme výraz pro počet tříd psáti též takto:

$$-\left(\frac{1}{7}\right)(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6) - \left(\frac{2}{7}\right)(s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6)$$
$$-\left(\frac{3}{7}\right)(s_3 + s_4 + s_5 + s_6) - \left(\frac{4}{7}\right)(s_4 + s_5 + s_6)$$
$$-\left(\frac{5}{7}\right)(s_5 + s_6) - \left(\frac{6}{7}\right)s_6.$$

Dosadíme-li za $\left(\frac{1}{7}\right), \left(\frac{2}{7}\right), \ldots$ a uvážíme-li, že $s_0 = s_6$, $s_1 = s_5$, $s_2 = s_4$ a že $2s_0 + 2s_1 + 2s_2 + s_3 = 0$, máme pro počet tříd tento výsledek

$$h(-7P) = 2s_0 - 2s_2.$$

Ku př. pro $D = -7 \,.\, 17 = -119$ jest počet tříd

$$2\left[\left(\frac{1}{17}\right)+\left(\frac{2}{17}\right)-\left(\frac{5}{17}\right)-\left(\frac{6}{17}\right)-\left(\frac{7}{17}\right)\right]$$
$$= 2(1+1+1+1+1) = 10.$$

Jako jiný příklad uvádím $D = -20(20k+1)$, anebo $D = -20(20k+9)$. Klademe-li v těchto případech $D = -20P$ a značíme-li

$$s_0 = \sum_k \left(\frac{k}{P}\right),\ k = 1, 2, \ldots E\frac{P}{20},$$

a obdobně $s_1, s_2, \ldots$ máme podobným počtem

$$h(-20P) = 4(s_0 - s_9).$$

Tak jest

$$h(-4.905) = 4(1+5) = 24,\ h(-4.545) = 4(3+5) = 32.$$

Týmž způsobem obdrželi bychom výsledky jednodušší nežli jest obecný vzorec odst. III. v případech Lejeune-Dirichletem zvlášť vyšetřovaných, zejména dospěli bychom ku vzorci odstavce IV. platnému pro $D = -4(4\varrho+1)$.

Jest jasno, jak lze výraz (w) dále zevšeobecniti. Jestliže ku př. $D = D_1D_2D_3$, jest počet tříd dán výrazem

$$h = -\Sigma(D_1, k_1)(D_2, k_2)(D_3, k_3) \,.\, E\left(\frac{k_1}{D_1}+\frac{k_2}{D_2}+\frac{k_3}{D_3}\right),$$
$$k_i = 1, 2, \ldots |D_i| - 1;\quad i = 1, 2, 3,$$

kde symbol E jest symbol Legendrův definovaný známým způsobem i při zaporných číslech. $(E(-a) = -E(a) - 1$ při $a > 0.)$