trických míst v okolí průsečíku co nejpřesněji zobraziti, jak ukazuje obr. 3., v němž sestrojeny společné tečny hyperboly a paraboly. V poloze, již obě křivky na obraze zaujímají, obdržíme pouze dvě společné tečny, neboť také oba rotační kužele mají pouze dvě společné tečné roviny, o čemž každý snadno se přesvědčí.

Součty některých řad.*)

Napsal **K. Čupr.**

II.

V „Příloze" tohoto časopisu roč. XXXIV. proponována byla úloha sečísti řady

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{3}+\binom{m}{6}+\dots$$

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{4}+\binom{m}{8}+\dots$$

Možno však sečísti řady tvaru daleko obecnějšího, totiž

$$\left.\begin{aligned}
S_0 &= \binom{n}{0}+\binom{n}{m}+\binom{n}{2m}+\binom{n}{3m}+\dots\\
S_1 &= \binom{n}{1}+\binom{n}{m+1}+\binom{n}{2m+1}+\binom{n}{3m+1}+\dots\\
&\vdots\\
S_{m-1} &= \binom{n}{m-1}+\binom{n}{2m-1}+\binom{n}{3m-1}+\dots
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Za tím účelem uvažujme binomickou rovnici

$$\alpha^m - 1 = 0,$$

jejíž kořeny buďtež $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k \dots \alpha_m$.

Tu platí především vztah

$$\alpha_k^{m+l} = \alpha_k^m \,.\, \alpha_k^l = \alpha_k^l \,. \tag{2}$$

Vztah tento platí pro libovolné $k = 1, 2 \dots m$ a pro jakékoliv číslo l.

---

*) Viz Přílohu k loňskému ročníku, str. 407.

Proveďme dle binomické poučky:

$$
\begin{aligned}
(1+\alpha_1)^n = 1 + \binom{n}{1}\alpha_1^1 + \binom{n}{2}\alpha_1^2 + \binom{n}{3}\alpha_1^3 + \dots \\
+ \binom{n}{m-1}\alpha_1^{m-1} \\
+ \binom{n}{m}\alpha_1^m + \binom{n}{m+1}\alpha_1^{m+1} + \dots \\
+ \binom{n}{2m-1}\alpha^{2m-1} \\
+ \binom{n}{2m}\alpha_1^{2m} + \binom{n}{2m+1}\alpha_1^{2m+1} + \dots \\
+ \binom{n}{3m-1}\alpha_1^{3m-1} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
+ \binom{n}{km}\alpha_1^{km} + \binom{n}{km+1}\alpha_1^{km+1} + \dots \\
+ \binom{n}{(k+1)m-1}\alpha_1^{(k+1)m-1} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

čili dle vztahu (2)

$$
\begin{aligned}
(1+\alpha_1)^n = 1 + \binom{n}{m} + \binom{n}{2m} + \dots \\
+ \alpha_1 \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{m+1} + \binom{n}{2m+1} + \dots\right] \\
\vdots \qquad \vdots \\
+ \alpha_1^{m-1}\left[\binom{n}{m-1} + \binom{n}{2m-1} + \dots\right],
\end{aligned}
$$

a dle systému (1)

$$(1+\alpha_1)^n = S_0 + S_1\alpha_1 + S_2\alpha_1^2 + \dots + S_{m-1}\alpha_1^{m-1}$$

a obdobně

$$
\left.
\begin{aligned}
(1+\alpha_2)^n &= S_0 + S_1\alpha_2 + S_1\alpha_2^2 + \dots + S_{m-1}\alpha_2^{m-1} \\
(1+\alpha_3)^n &= S_0 + S_1\alpha_3 + S_2\alpha_3^2 + \dots + S_{m-1}\alpha_3^{m-1} \\
&\vdots \\
(1+\alpha^m)^n &= S_0 + S_1\alpha_m + S_2\alpha_m^2 + \dots + S_{m-1}\alpha_m^{m-1}.
\end{aligned}
\right\} \quad (3)
$$

To jest systém m lineárních rovnic o m neznámých

$$S_0 S_1 \ldots S_{m-1}.$$

Chceme-li z tohoto systému vypočísti S_k, násobme

$$\begin{array}{llll} 1. & \text{rovnici} & \text{výrazem} & \alpha_2^{m-k} \\ 2. & " & " & \alpha_2^{m-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m & " & " & \alpha_m^{m-k} \end{array}$$

a sečtěme. Pak bude

$$\begin{aligned} (1+\alpha_1)^n &= \alpha_1^{m-k}(1+\alpha_1)^n + \alpha_2^{m-k}(1+\alpha_2)^n + \ldots + (1+\alpha_m)^n . \alpha_m^{m-k} \\ &= S_0 (\alpha_1^{m-k} + \alpha_2^{m-k} + \ldots + \alpha_m^{m-k}) \\ &+ S_1 (\alpha_1^{m-k+1} + \alpha_2^{m-k+1} + \ldots \alpha_m^{m-k+1}) \\ &\vdots \\ &+ S_k (\alpha_1^m + \alpha_2^m + \ldots + \alpha_m^m) \\ &\vdots \\ &+ S_{m-1} (\alpha_1^{2m-k} + \alpha_2^{2m-k} + \ldots + \alpha_m^{2m-k} \end{aligned} \tag{4}$$

Jde především o součet řady

$$\alpha_1^\varrho + \alpha_2^\varrho + \alpha_3^\varrho + \ldots + \alpha_m^\varrho.$$

Musíme rozeznávati případy dva: 1. buď ϱ jest násobkem čísla m, $\varrho = rm$; 2. buď jím není, $\varrho = rm + s$, $s \gtrless 0$.

Ad 1.

$$\begin{aligned} &\alpha_1^\varrho + \alpha_2^\varrho + \alpha_3^\varrho + \ldots + \alpha_m^\varrho \\ &= \alpha_1^{rm} + \alpha_2^{rm} + \alpha_3^{rm} + \ldots + \alpha_m^{rm} \\ &= 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = m. \end{aligned}$$

Ad 2. Dle známého řešení binomických rovnic pomocí poučky Moivreovy jest:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m}, \\ &\vdots \\ \alpha_t &= \cos t \frac{2\pi}{m} + i \sin t \frac{2\pi}{m}, \\ &\vdots \\ \alpha_m &= \cos 2\pi + i \sin 2\pi. \end{aligned}$$

a dále

$$\alpha_1^\varrho = \cos \varrho \frac{2\pi}{m} + i \sin \varrho \frac{2\pi}{m},$$

$$\alpha_2^\varrho = \cos 2\varrho \frac{2\pi}{m} + i \sin 2\varrho \frac{2\pi}{m},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\alpha_t^\varrho = \cos t\varrho \frac{2\pi}{m} + i \sin t\varrho \frac{2\pi}{m},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\alpha_m^\varrho = \cos \varrho\, 2\pi + i \sin \varrho\, 2\pi.$$

Máme tedy

$$\alpha_1^\varrho + \alpha_2^\varrho + \ldots + \alpha_t^\varrho + \ldots + \alpha_m^\varrho$$

$$= \left(\cos \varrho \frac{2\pi}{m} + \cos 2\varrho \frac{2\pi}{m} + \ldots + \cos t\varrho \frac{2\pi}{m} + \ldots \cos \varrho\, 2\pi\right)$$

$$+ i \left(\sin \varrho \frac{2\pi}{m} + \sin 2\varrho \frac{2\pi}{m} + \ldots + \sin t\varrho \frac{2\pi}{m} + \ldots \sin \varrho\, 2\pi\right).$$

Dosadíme-li nyní do . . . 2) a . . . 4) v I.*)

$$\alpha = \frac{2\pi}{m},$$

obdržíme

$$\alpha_1^\varrho + \alpha_2^\varrho + \ldots + \alpha_m^\varrho$$

$$\frac{\sin \frac{m}{2} \frac{2\pi}{m} \cos \frac{m+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{m}} + i \frac{\sin \frac{m}{2} \frac{2\pi}{m} \sin \frac{m+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{m}} \equiv 0.$$

Tím se nám mění (4) na rovnici

$$mS_k = \alpha_1^{m-k} (1 + \alpha_1)^n + \alpha_2^{m-k} (1 + \alpha_2)^n + \ldots \alpha_{m}^{m-k} (1 + \alpha_m)^n \qquad (5)$$

Pravá strana této rovnice, poněvadž α, $\alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ jsou veličiny komplexní, jest tvaru $A + Bi$. Dle známého pravidla bude

$$mS_k = A$$
$$0 = B.$$

---

*) Viz Přílohu k ročníku minulému str. 407.

Abychom vypočetli A, pišme

$$\alpha_\nu^{m-k}(1+\alpha_\nu)^n = \alpha_\nu^{-k}(1+\alpha_\nu)^n$$

$$= \left(\cos\frac{2\nu\pi}{m} + i\sin\frac{2\nu\pi}{m}\right)^{-k}\left(1+\cos\frac{2\nu\pi}{m} + i\sin\frac{2\nu\pi}{m}\right)^n$$

$$= \left(\cos k\frac{2\nu\pi}{m} - i\sin k\frac{2\nu\pi}{m}\right)\left(2\cos^2\frac{\nu\pi}{m} + 2i\cos\frac{\nu\pi}{m}\sin\frac{\nu\pi}{m}\right)^n$$

$$= \left(\cos k\frac{2\nu\pi}{m} - i\sin k\frac{2\nu\pi}{m}\right)2^n\cos^n\frac{\nu\pi}{m}\left(\cos n\frac{\nu\pi}{m} + i\sin n\frac{\nu\pi}{m}\right)$$

$$= 2^n\cos^n\frac{\nu\pi}{m}\left\{\left[\cos k\frac{2\nu\pi}{m}\cos n\frac{\nu\pi}{m} + \sin k\frac{2\nu\pi}{m}\sin n\frac{\nu\pi}{m}\right]\right.$$

$$\left. + i\left[\cos k\frac{2\nu\pi}{m}\sin n\frac{\nu\pi}{m} - \cos n\frac{\nu\pi}{m}\sin k\frac{2\nu\pi}{m}\right]\right\}$$

$$= 2^n\cos^n\frac{\nu\pi}{m}\cos\frac{\pi\nu}{m}(2k-n) + i\,2^n\cos^n\frac{\nu\pi}{m}\sin\frac{\pi\nu}{m}(2k-n).$$

Jest tedy konečně

$$mS_k = 2^n\cos^n\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{m}(k-n) + 2^n\cos^n\frac{2\pi}{m}\cos\frac{2\pi}{m}(k-n)$$

$$+ 2^n\cos^n\frac{3\pi}{m}\cos\frac{3\pi}{m}(k-n) + \ldots + 2^n\cos^n\pi\cos\pi(k-n)$$

$$= 2^n\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\cos^n\frac{\pi\nu}{m}\cos\frac{n-2k}{m}\pi\nu; \tag{6}$$

čili

$$S_k = \frac{2^n}{m}\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\cos^n\frac{\pi\nu}{m}\cos\frac{n-2k}{m}\pi\nu.$$

Je-li na př. $n = 1000$, $m = 10$; má S_k nanejvýš 100 členů, kdežto řada (6) pouze 10. Může však nastati případ opačný, že řada (6) má více členů než S_k; na př. $n = 1000$, $m = 100$, pak řada pro S_k má nejvýše 10 členů, kdežto (6) jich má 100.

V tomto případě nelze tedy tak přesně mluviti o součtu jako v případě I.

Jedná se zde spíše o zajímavou transformaci řady, zajímavou tím, že jsouc elementární applikuje řadu známých pouček.

Mimochodem nabýváme vztahu

$$B = cos^n \frac{\pi}{m} sin \frac{n-2k}{m}\pi + cos^n \frac{2\pi}{m} sin\, 2\frac{n-2k}{m}\pi + \dots$$

$$+ cos^n \pi\, sin\,(n-2k)\,\pi = \sum_{\nu=1}^{\nu=m} cos^n \frac{\pi\nu}{m} sin \frac{n-2k}{m}\pi\nu = 0.$$

Když bychom uvažovali místo mocnin

$$(1+\alpha_1)^n,\ (1+\alpha_2)^n, \dots (1+\alpha_m)^n$$

mocniny

$$(1-\alpha_1)^n,\ (1-\alpha_2)^n, \dots (1-\alpha_m)^n,$$

snadným rozborem bychom poznali, že pro sudé m nenabýváme žádných nových vztahů, kdežto pro liché m získáme relace pro řady

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{m} + \binom{n}{2m} - \binom{n}{3m} + \dots = S'_0$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{m+1} + \binom{n}{2m+1} + \dots = -S'_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{m+k} + \binom{n}{2m+k} - \dots = (-1)^k S'_k$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\binom{n}{m+1} - \binom{n}{2m-1} + \binom{n}{3m-1} - \dots = (-1)^{m-1} S_{m-1} = S_{m-1}.$$

Vyšetřování jest zde zcela obdobné dřívějšímu, pročež od úplného provedení zde upouštíme.

III.

Hledejme součet nekonečné řady konvergentní

$$Sm = \frac{1}{1.2.3\dots m} + \frac{1}{2.3.4\dots(m+1)} + \dots$$

$$+ \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m-1)} + \dots \qquad (1)$$

Aby vyšetřování v případě obecném lépe vyniklo, uvedeme předem 3 případy speciální.

a) $m = 2$;

$$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \qquad (2)$$

Rozložme $\frac{1}{n(n+1)}$ na součet dvou zlomků o jmenovatelích n, $n+1$ a čitatelích a_0, a_1, při čemž a_0, a_1 jsou čísla reálná určená rovnicemi plynoucími ze vztahu

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n+1},$$

jež tedy zní:

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1 &= 0 \\ a_0 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Pak jest

$$S_2 = \frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \ldots + \frac{a_0}{n-1} + \frac{a_1}{n}$$

$$+ \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n+1} + \ldots = a_0 + \frac{1}{2}(a_0 + a_1) + \frac{1}{3}(a_0 + a_1) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n-1}(a_0 + a_1) + \frac{1}{n}(a_0 + a_1) + \frac{a_1}{n+1} \qquad (4)$$

a použijeme-li vztahů (3) obdržíme

$$S_2 = a_0 + \frac{a_1}{n+1},$$

a poněvadž n roste do nekonečna, jest

$$\frac{a_1}{n+1} = 0$$

a tedy

$$S_2 = a_0 = 1.$$

Zúmyslně v (4) nebylo psáno

$$S_2 = a_0 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \ldots\right) \times$$

$$(a_0 + a_1) + \frac{a_1}{n+1},$$

poněvadž při přechodu $\lim n = \infty$, obdrželi bychom řadu harmonickou, tedy divergentní a chtěli-li bychom zůstati přesni, musili bychom dokázati, že neurčitý výraz tvaru ∞ . 0 skutečně v tomto případě rovná se 0, což by snadno se nedalo provésti.

b) Zcela podobně počínáme si s řadou

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots \frac{1}{n(n+1)(n+2)}. \qquad (5)$$

Rozložme obecný člen dle vzorce

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{n+2}, \tag{6}$$

odkudž plynou vztahy pro a_0, a_1, a_2

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &= 0 \\ 3a_0 + 2a_1 + a_2 &= 0 \\ 2a_0 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Jest tedy

$$\begin{aligned} S_3 = {} & \frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \\ & \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4} \\ & \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{5} \\ & \vdots \\ & \frac{a_0}{n-2} + \frac{a_1}{n-1} + \frac{a_2}{n} \\ & \frac{a_0}{n-1} + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n-1} \\ & \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{n+2} \end{aligned}$$

$$= a_0 + \frac{1}{2}(a_0 + a_1) + \frac{1}{3}(a_0 + a_1 + a_2) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n+1}(a_1 + a_2) + \frac{a_2}{n+2}.$$

Položíme-li *lim* $n = \infty$ a použijeme-li vztahů (7), obdržíme

$$S_3 = a_0 + \frac{1}{2}(a_0 + a_1) = \frac{1}{4}.$$

c) Docela týmtéž způsobem sečteme

$$S_4 + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots \tag{8}$$

Bude $\quad S_4 = a_0 + \frac{1}{2}(a_0 + a_1) + \frac{1}{3}(a_0 + a_1 + a_2)$

$$+ \frac{1}{4}(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + \ldots + \frac{1}{n}(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)$$

$$+ \frac{1}{n+1}(a_1 + a_2 + a_3) + \frac{1}{n+2}(a_1 + a_2) + \frac{a_3}{n+3},$$

při čemž a_0, a_1, a_2, a_3 určí se z rovnic plynoucích z

$$\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} = \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{n+2} + \frac{a_3}{n+3},$$

takže

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ 6a_0 + 5a_1 + 4a_2 + 3a_3 &= 0 \\ a_0 + 6a_1 + 3a_2 + 2a_3 &= 0 \\ 6a_0 &= 1. \end{aligned}$$

Pomocí těchto rovnic a pro $lim\ n = \infty$ obdržíme

$$S_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{18}.$$

d) Obecně pro řadu S_m bude

$$\begin{aligned} S_m = a_0 &+ \frac{1}{2}(a_0 + a_1) + \frac{1}{3}(a_0 + a_1 + a_2) + \ldots \\ &+ \frac{1}{m-1}(a_0 + \ldots + a_{m-2}) + \frac{1}{m}(a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-1}) \\ &+ \frac{1}{m+1}\left(a_0 + a_1 + \ldots + \frac{1}{a_{m-1}}\right) + \ldots \\ &+ \frac{1}{n+1}(a_1 + \ldots + a_{m-1}) + \frac{1}{n+2}(a_2 + \ldots + a_{m-1}) \\ &+ \frac{1}{n+3}(a_3 + \ldots + a_{m-1}) + \frac{1}{n+m-1}\,a_{m-1} \end{aligned} \tag{9}$$

a_0, $a_1 \ldots a_{m-1}$ závisí na rovnicích vyvozených ze vztahu

$$\frac{1}{n\,(n+1)\ldots(n+m-1)} = \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n+1} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{n+m-1}, \tag{10}$$

z nichž si však poznamenáme pouze prvou, totiž

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-1} = 0.$$

Se zřetelem k tomuto vztahu a pro $lim\ n = \infty$ máme

$$\begin{aligned} S_m = a_0 &+ \frac{1}{2}(a_0 + a_1) + \frac{1}{3}(a_0 + a_1 + a_2) + \ldots \\ &+ \frac{1}{m-1}(a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-2}). \end{aligned} \tag{11}$$

Abychom určili a_k, násobme (11) výrazem $n+k$; tím bude

$$a_k + (n+k)\left(\frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n+1} + \ldots + \frac{a_{n+k-1}}{n+k-1}\right.$$
$$\left. + \frac{a_{n+k-1}}{n+k+1} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{n+m-1}\right)$$
$$= \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)(n+k+1)\ldots n+m-1};$$

položme $n = -k$ a obdržíme

$$a_k = \frac{1}{(-k)(-k+1)\ldots -1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,\ldots (m-k-1)}$$
$$= \frac{(-1)^k}{k!\,(m-k-1)!} = (-1)^k \binom{m-1}{k} \frac{1}{(m-1)!}.$$

To dosazeno do (11) dá

$$(m-1)!\, S_m = \binom{m-1}{0} + \frac{1}{2}\left[\binom{m-1}{0} - \binom{m-1}{1}\right]$$
$$+ \frac{1}{3}\left[\binom{m-1}{0} - \binom{m-1}{1} + \binom{m-1}{2}\right] + \ldots$$
$$+ \frac{1}{m-1}\left[\binom{m-1}{0} - \binom{m-1}{1} + \ldots + (-1)^{m-2}\binom{m-1}{m-2}\right], \tag{12}$$

nebo též

$$(m-1)!\, S_m = \binom{m-1}{0}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m-1}\right)$$
$$- \binom{m-1}{1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m-1}\right)$$
$$+ \ldots + (-1)^{m-2} \frac{1}{m-1}\binom{m-1}{m-2}. \tag{13}$$

Vzorce (12) a (13) nám dávají tedy součet řady nekonečné řadou konečnou. Avšak vycházejíce od (12) můžeme výrazu pro S_m dáti formu ještě jednodušší.

Označme

$$a_{k,m} = \binom{m-1}{0} - \binom{m-1}{1} + \ldots + (-1)^k \binom{m-1}{k}$$

a zavedeme-li $m+1$ místo m, bude

$$a_{k,m+1} = \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \ldots + (-1)^k \binom{m}{k}.$$

Snadno vypočteme, že

$$a_{k,\,m+1} - a_{k,\,m} = \left[\binom{m}{0} - \binom{m-1}{0}\right] - \left[\binom{m}{1} - \binom{m-1}{1}\right] + \dots$$

$$+ (-1)^k \left[\binom{m}{k} - \binom{m-1}{k}\right]$$

$$= 0 - \binom{m-1}{0} + \binom{m-1}{1} + \dots + (-1)^k \binom{m-1}{k-1},$$

při čemž bylo použito vzorce

$$\binom{m}{s} - \binom{m-1}{s} = \frac{m!}{(m-s)!\,s!} - \frac{(m-1)!}{(m-s-1)\,s!}$$

$$= \frac{(m-1)!}{(m-s-1)!\,s!}\left(\frac{m}{m-s} - 1\right)$$

$$= \frac{(m-1)!}{(m-s-1)!\,s!} \cdot \frac{s}{m-s}$$

$$= \frac{(m-1)!}{(m-s)!\,(s-1)!} = \binom{m-1}{s-1}.$$

Dále jest

$$a_{k,\,m+1} = a_{k,\,m} - \binom{m-1}{0} + \binom{m-1}{1} + \dots + (-1)^k \binom{m-1}{k-1}$$

$$= \left[\binom{m-1}{0} - \binom{m-1}{1} + \dots + (-1)^k \binom{m-1}{k}\right]$$

$$- \left[\binom{m-1}{0} - \binom{m-1}{1} + \dots + (-1)^k \binom{m-1}{k-1}\right]$$

$$= (-1)^k \binom{m-1}{k}.$$

To dosazeno do (12) dá

$$(m-1)!\,S_m = \binom{m-2}{0} - \frac{1}{2}\binom{m-2}{1} + \frac{1}{3}\binom{m-2}{2} + \dots$$

$$+ (-1)^{m-2} \frac{1}{m-1}\binom{m-2}{m-2}, \tag{14}$$

což jest výraz značně jednodušší než (12).

Součet řady nekonečné jest zde řadou konečnou mající jen $(m-1)$ členů.