Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Srovnávací poznámky o řadě Fredholmově a Du Bois-Reymondově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 3, 225--236

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122997`

Srovnávací poznámky o řadě Fredholmově a Du Bois-Reymondově.

Příspěvek k stanovení oblasti funkcí analytických určitého druhu.

Podává M. Lerch v Brně.

Ve svém sdělení „Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm“ *) podává p. Mittag-Leffler ne zcela úplný důkaz věty, že analytická funkce komplexní proměnné v, definovaná prvkem

$$z = \sum_0^\infty e^{-m^2 v - m\alpha},$$

má omezenou existenční oblast a sice na pravou polovici roviny (v), v níž realná část proměnné je kladná. Důkaz ten zakládá se hlavně na rovnici s částečnými derivacemi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = -\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{1}$$

které uvedená řada zřejmě hoví. Avšak tato rovnice (1) je také splněna v případě funkce t. z. Du Bois-Reymondovy

$$z = \sum_1^\infty e^{-mv - \alpha\sqrt{m}}$$

a o té jsem ukázal **), že existuje v celé rovině (v), majíc toliko na ose pomyslné isolovaná místa zvláštní určitého druhu.

Obě řady jsou společného typu

$$\sum_0^\infty c_m e^{-mv-\alpha\sqrt{m}} = \Phi(v, \alpha), \tag{2}$$

kde c_m značí konstanty nezávislé na α, a také tato funkce

$$z = \Phi(v, \alpha)$$

hoví rovnici (1).

---

*) Acta mathematica, sv. XV.

**) O povaze funkce $\Sigma\, u^m e^{-2\sqrt{am}}$ v okolí bodu $u = 1$, Časopis roč. XXXIX. str. 121. V jiné formě již před dvanácti lety, o čemž blíže viz n. u. m.

Řada Fredholmova vznikne volbou

$$c_m = 1 \text{ pro } m = 0, 1, 4, 9, 16, \ldots \nu^2, \ldots$$

$$c_m = 0 \text{ pro ostatní } m,$$

kdežto řada Du Bois-Reymondova odpovídá hodnotám $c_m = 1$, potlačíme-li ve (2) první člen, který je stálý.

Uvedené zcela opačné chování se obou funkcí vede k otázce, za jakých podmínek lze rozšířiti oblast funkce $\bar{z}$ komplexní proměnné v, kterážto funkce vznikne specialisací hodnoty α z funkce z dvou proměnných v, α, hovící částečné rovnici differenciální

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = \varkappa \frac{\partial z}{\partial v}, \tag{3}$$

při čemž $\varkappa$ značí libovolnou stálou.

Sem spadá také stanovení existenčního oboru elliptických transcendent ϑ_ν $(u \mid \omega)$ vůči parametru ω, která otázka ovšem již jiným způsobem byla řešena; tyto transcendenty hoví rovnici

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \omega}.$$

---

1. V rovině komplexní proměnné v buď vymezen obor $\mathfrak{G}$, v rovině proměnné α pak obor $\mathfrak{A}$, a předpokládejme, že definována jest analytická funkce dvou proměnných

$$z = F(v, \alpha),$$

pravidelná, pokud tyto jsou omezeny na obory $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{A}$, a hovící rovnici (3).

Tu snadno ukážeme, že funkce je vůči α celistvou, ovšem pokud z náleží původnímu oboru $\mathfrak{G}$.

Neboť z rovnice (3) vychází

$$\frac{\partial^{2n} z}{\partial \alpha^{2n}} = \varkappa^n \frac{\partial^n z}{\partial v^n}, \quad \frac{\partial^{2n+1} z}{\partial \alpha^{2n+1}} = \varkappa^n \frac{\partial^{n+1} z}{\partial v^n \partial \alpha},$$

a Taylorova řada

$$F(v, \alpha + h) = \sum_0^\infty \frac{\partial^m z}{\partial \alpha^m} \frac{h^m}{m!}$$

se rozpadne ve dvě

$$F(v, \alpha + h) = \sum_0^\infty \frac{\partial^n z}{\partial v^n} \frac{\varkappa^n h^{2n}}{(2n)!} + \sum_0^\infty \frac{\partial^{n+1} z}{\partial v^n \partial \alpha} \frac{\varkappa^n h^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{4}$$

které konvergují pro každé konečné h, absolutně a stejnoměrně.

Neboť bod v leží uvnitř oboru $\mathfrak{G}$, i můžeme určiti malou kladnou veličinu ϱ tak, že bude řada Taylorova

$$F(v + l, \alpha) = \sum_0^\infty \frac{\partial^n z}{\partial v^n} \frac{l^n}{n!} = \sum_0^\infty T_n$$

absolutně konvergentní pro $|\, l \,| \leqq \varrho$, při čemž psáno

$$T_n = \frac{\partial^n z}{\partial v^n} \frac{l^n}{n!}.$$

Znamenejme obecný člen první z řad (4)

$$U_n = \frac{\partial^n z}{\partial v^n} \frac{\varkappa^n h^{2n}}{(2n)!},$$

i bude

$$U_n = \mu_n T_n, \; \mu_n = \frac{\varkappa^n h^{2n}}{l^n} \cdot \frac{n!}{(2n)!}$$

a zároveň

$$\lim_{n=\infty} \mu_n = 0.$$

Multiplikátory μ_n tedy mohou jen zrychliti konvergenci řady

$$\Sigma \mu_n T_n = \Sigma U_n,$$

a první řada (4) konverguje tedy pro každé konečné h.

Pokud v jest uvnitř $\mathfrak{G}$, je také veličina

$$F'(v, \alpha) = \frac{\partial F(v, \alpha)}{\partial \alpha}$$

pravidelnou funkcí proměnné v a z jejího Taylorovského rozvoje

$$F'(v + l, \alpha) = \sum_0^\infty \frac{\partial^{n+1} z}{\partial^n v \partial \alpha} \frac{l^n}{n!}$$

čerpáme důkaz konvergence druhé řady (4) zcela podobně jako posledně.

Tudíž: Pokud proměnná v náleží původnímu oboru $\mathfrak{G}$, je z celistvou transcendentou vůči α, oborem $\mathfrak{A}$ je celá rovina (α).

2. Udělme parametru α hodnotu zvláštní β; tím přejde $F(v, \alpha)$ v určitou funkci $\Phi(v)$, a $F'(v, \alpha)$ v určitou funkci $\Phi_1(v)$, pokud v se předpokládá v oboru $\mathfrak{G}$.

Funkce $\Phi(v)$ a $\Phi_1(v)$ *mohou* se chovati pravidelně v témž oboru $\mathfrak{R}$, jenž je částečně položen v $\mathfrak{G}$ a z části vystupuje z $\mathfrak{G}$, takže tím docílena pro obě funkce širší oblast. Avšak nutné to není. Na př. funkce

$$\vartheta_1(\alpha \mid \omega)$$

je definována pro všecka α, a pro severní polovici roviny (ω), která tedy splývá s oborem $\mathfrak{G}$; pro $\alpha = 0$ funkce

$$\vartheta_1(0 \mid \omega) = 0$$

existuje v celé rovině (ω), nelze to však tvrditi o funkci

$$\vartheta'_1(0 \mid \omega) = 2\pi \sum_0^\infty (-1)^\nu (2\nu + 1)\, e^{(\nu + \frac{1}{2})^2 \omega \pi i}.$$

Naproti tomu u funkce $\Phi(\omega, \alpha) = \vartheta_3(\alpha \mid \omega)$ existuje

$$\Phi_1(\omega) = \vartheta'_3(0 \mid \omega) = 0$$

v celé rovině, nikoli však $\Phi(\omega)$.

Předpokládejme však, že funkce naše $\Phi(v)$, $\Phi_1(v)$ mají společný obor prolongační $\mathfrak{R}$; pak existují pro v položená uvnitř $\mathfrak{R}$ a zevně $\mathfrak{G}$ konvergentní rozvoje

$$\sum \Phi^{(n)}(v) \frac{l^{(n)}}{n!} = \Phi(v + l),$$

$$\sum \Phi_1^{(n)}(v) \frac{l^{(n)}}{n!} = \Phi_1(v + l),$$

a následující řada z jich součinitelů podobně utvořená jako (4)

$$\Psi(v, \alpha) = \sum_0^\infty \Phi^{(n)}(v) \frac{\varkappa^n}{(2n)!} (\alpha - \beta)^{2n} \tag{5}$$

$$+ \sum_0^\infty \Phi_1^{(n)}(v) \frac{\varkappa^n}{(2n+1)!} (\alpha - \beta)^{2n+1}$$

bude konvergentní pro všecka α; přímým derivováním se zjistí, že zde platí (3):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = \varkappa \frac{\partial \Phi}{\partial v} \text{ (pro } v \text{ na } \mathfrak{G} + \mathfrak{R}, \text{ a v celé rovině } \alpha).$$

Neboť pro v uvnitř $\mathfrak{G}$ přejde (5) v řadu (4). Tím dokázána věta:

Hoví-li analytické funkce z proměnné v rovnici (3), *pokud v náleží oboru $\mathfrak{G}$, a mají-li funkce z, $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ pro určité $\alpha = \beta$ hodnoty $\Phi(v)$, resp. $\Phi_1(v)$, které jsou pravidelny na společném oboru prolongačním $\mathfrak{R}$, chová se funkce z pro všecka v oboru $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$ pravidelně a jest celistvou transcendentou vůči α.*

3. Zvolme jako příklad

$$\Phi(\omega, \alpha) = \vartheta_1(\alpha \mid \omega) = 2 \sum_0^\infty (-1)^\nu q^{(\nu + \frac{1}{2})^2} \sin(2\nu + 1) \alpha\pi,$$

kde

$$q = e^{\omega\pi i}, \quad |q| < 1.$$

Kdyby $\vartheta'_1(0 \mid \omega)$ připouštěla prolongaci do jižní polovice roviny (ω), tedy bychom měli řadou (5) dánu funkci

$$\Psi(\omega, \alpha) \text{ pro } \omega = x + iy, \; y \gtreqq 0,$$

která hoví rovnici

$$\Psi(\omega, \alpha + 1) + \Psi(\omega, \alpha) = 0, \quad \Psi(-\alpha) + \Psi(\alpha) = 0,$$

pokud

$$\omega = x + iy, \; y > 0.$$

Levá strana je však pravidelná na oboru $\mathfrak{R}$, tedy též pro jistá

$$\omega = x + iy, \; y \leqq 0,$$

a poslední rovnice zůstane platnou. Bude pak existovati rozvoj (při těchto y)

$$\Psi(\omega, \alpha) = \sum_0^\infty A_\nu \sin(2\nu + 1) \alpha\pi \tag{6}$$

$$A_\nu = 2 \int_0^1 \Psi(\omega, \alpha) \sin(2\nu + 1) \alpha\pi \, d\alpha;$$

pravá strana je pravidelná v oboru $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$, uvnitř $\mathfrak{G}$ splývá s hodnotou

$$A_\nu = 2(-1)^\nu q^{(\nu + \frac{1}{2})^2};$$

rovnice poslední

$$2\int_0^1 \Psi'(\omega, \alpha)\, sin\,(2\nu+1)\,\alpha\pi\, d\alpha = 2\,(-1)^\nu\, q^{(\nu+\frac{1}{2})^2}$$

zůstane v platnosti tedy také na $\mathfrak{R}$ zevně $\mathfrak{G}$, t. j. pro

$$\omega = x + iy,\ y \leqq 0,$$

kde však

$$|\,q\,| \geqq 1,$$

a řada (6) diverguje. To obsahuje odpor, i vyšli jsme z nesprávného předpokladu; t j. funkce

$$\vartheta'_1\,(0 \mid \omega) = 2\pi \sum_0^\infty (-1)^\nu\,(2\nu+1)\,q^{(\nu+\frac{1}{2})^2}$$

existuje pouze v severní polovici roviny ω, t. j. pro $|\,q\,| < 1$.

4. V případě funkce Fredholmovy

$$F\,(v, \alpha) = \sum_0^\infty e^{-m^2 v - m\alpha}$$

užili bychom vlastnosti

$$F\,(v, \alpha + 2\pi i) - F\,(v, \alpha) = 0,$$

abychom ukázali, že trigonometrický rozvoj příslušné funkce (5) diverguje pro v mimo $\mathfrak{G}$ ležící; odtud bychom soudili, že funkce

$$\Phi\,(v) = \sum_0^\infty e^{-m^2 v - m\beta}$$

$$\Phi_1\,(v) = -\sum_0^\infty {}_m\, e^{-m^2 v - m\beta}$$

nemají společného oboru prolongačního $\mathfrak{R}$ (přes osu pomyslnou). Tvrzení, že by buď $\Phi\,(v)$ neb $\Phi_1\,(v)$ svojí cestou nepřipouštělo propagaci, tím při stálém β dokázáno není.

Proto učiníme krok další, a předpokládáme, že funkce *$\Phi\,(v)$ připouští obor prolongační* $\mathfrak{R}$, aniž se staráme o funkci $\Phi_1\,(v)$.

Tak zůstane existence řady

$$H\,(v, \alpha) = \sum_0^\infty \Phi^{(n)}\,(v)\,\frac{x^n}{(2n)!}\,(\alpha-\beta)^{2n} \qquad (6)$$

zajištěna; je to funkce vůči α celistvá, vůči v pravidelná na oboru $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$; pro v uvnitř $\mathfrak{G}$ splývá s funkcí

$$H(v, \alpha) = \frac{1}{2}\left\{F(v, \alpha) + F(v, 2\beta - \alpha)\right\}. \tag{7}$$

Jakmile tedy $F(v, \beta)$ existuje na $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$, je funkce

$$F(v, \alpha) + F(v, 2\beta - \alpha)$$

schopna prolongace do $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$ a je celistvou vůči α.

V případě Fredholmově bude pak

$$H(v, \alpha + 2\pi i) = H(v, \alpha)$$

a z trigonometrického rozvoje

$$2H(v, \alpha) = 2 + \sum_1^\infty e^{-m^2v - m\alpha} + \sum_1^\infty e^{-m^2v - 2m\beta + m\alpha},$$

který diverguje pro v o záporné části reálné, soudíme opět na nesprávnost hypothese, že

$$F(v, \beta) = \Phi(v)$$

připouští prolongaci. Tím věta Fredholmova dokázána.

Podobně se ukáže, že funkce $\vartheta_\nu(u \mid \omega)$ mají oblast (ω) totožnou se severní polovicí roviny při každém u, pro něž řada

$$\vartheta_\nu(u \mid \omega) = c \Sigma \pm q^{m^2} (e^{\pm 2mu\pi i} - e^{\mp 2mu\pi i})$$

stane se divergentní za $|q| \geqq 1$, tedy s jedinou výjimkou

$u =$ cel. číslo pro ϑ_1 a $u = \frac{1}{2} +$ cel. č. pro ϑ_2.

Stejným způsobem se dokáže věta, že existence prolongačního oboru $\mathfrak{R}$ pro funkci $\Phi_1(v)$ má za následek existenci funkce

$$K(v, \alpha) = \sum_0^\infty \Phi_1^{(n)}(v) \frac{x^n}{(2n+1)!} (\beta - \alpha)^{2n+1} \tag{7}$$

pro v z oboru $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$ a pro všecka α; funkce ta je propagace veličiny

$$K(v, \alpha) = \frac{1}{2}\{F(v, \alpha) - F(v, 2\beta - \alpha)\}.$$

5. Obecněji můžeme dokázati, že existenční obor funkce proměnné v

$$F(v,\alpha)=\Sigma\, c_m e^{-m^2v-m\alpha},$$

$$\Sigma\, c_m e^{-m^2v}\cos 2m\alpha,\quad \Sigma\, c_m e^{-m^2v}\sin 2m\alpha,$$

kde summační podmínky znějí buď $m=0, 1, 2, 3, \ldots$ aneb $m=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$ kryje se s oborem konvergenčním $\mathfrak{G}$, kdežto pro α je každá hodnota přípustna. Výjimka nastane pouze u řad

$$\Sigma\, c_m e^{-m^2v}\cos 2m\alpha,\quad (2m=1, 3, 5\ldots)$$

pro $\alpha=\frac{\pi}{2}$, a pak u řad

$$\Sigma\, c_m e^{-m^2v}\sin 2m\alpha$$

pro $\alpha=0$, při lichých $2m$, pak též pro $\alpha=\frac{\pi}{2}$ při celistvých m, při čemž samozřejmě jsou připojitelny k hodnotám α násobky periody π.

Funkce $2H(v,\alpha)$, která v oboru $\mathfrak{G}$ splývá s veličinou

$$F(v,\alpha)+F(v,2\beta-\alpha), \tag{a}$$

má při v z oboru $\mathfrak{G}+\mathfrak{R}$ tytéž periodické vlastnosti vůči α jako funkce $F(v,\alpha)$ jí příslušná, a bude tedy existovati rozvoj téhož tvaru, jaký má funkce (a) pro body v z oboru $\mathfrak{G}$.

Na př. pro první funkci bude

$$2H(v,\alpha)=\Sigma\, c_m e^{-m^2v}(e^{-m\alpha}+e^{m(\alpha-2\beta)})$$

a ta řada musí konvergovati též v oboru $\mathfrak{R}$; to však je vyloučeno, pokud veličiny

$$e^{m(\alpha-\beta)}+e^{m(\beta-\alpha)}$$

nejsou nullami.

6. Na konec ještě věnujme pozornost funkci Du Bois-Reymondově

$$F(v,\alpha)=\sum_1^\infty e^{-mv-\alpha\sqrt{m}};$$

za hodnotu β zvolme nullu, tak že bude

$$\Phi(v) = \sum_1^\infty e^{-mv} = \frac{1}{e^v - 1},$$

$$\Phi_1(v) = -\sum_1^\infty \sqrt{m}\, e^{-mv} = \frac{d}{dv} S(v),$$

kde

$$S(v) = \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{m}} e^{-mv}.$$

Veličina $\Phi(v)$ jest jednoznačná funkce v celé rovině až na póly $v = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \pm 6\pi i, \ldots$ pravidelná, i zbývá jen vyšetřiti povahu funkce S.

Ze vzorce

$$\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-mx} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

obdržíme

$$S(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \sum_1^\infty e^{-m(x+v)},$$

tedy

$$S(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{e^{x+v} - 1} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \tag{8}$$

Aby integrace nerušeně byla možna, dlužno z roviny (v) vyloučiti body na řezech daných rovnicemi

$$v = 2\nu\pi i - x \,(x \geqq 0;\ \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Řezy tyto vycházejí z bodů $2\nu\pi i$ na ose pomyslné a probíhají v levé polovici roviny (v) rovnoběžně s osou reálnou do nekonečna.

To postačí k seznání existence funkce $S(v)$ a tedy též $\Phi_1(v)$ v celé rovině (v) mimo body zvláštní $v = 2\nu\pi i$; následkem toho funkce daná prvkem $F(v, \alpha)$ existuje v celé rovině (v), má v ní pouze místa zvláštní $v = 2\nu\pi i$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ a zůstává jednoznačnou v rovině té po provedení naznačených řezů.

Dodatek. Roku 1886, kdy jsem začal uveřejňovati různé články o theorii funkcí, byly pokud mi známo, veškery příklady funkcí s omezenou oblastí toho druhu, že se funkce stane nekonečnou na určitých místech okraje. V první své stati o těchto otázkách jednající*) jsem uvažoval funkce, jichž nullová místa se hromadí podél celého okraje existenční oblasti. Neboť hromadné místo bodů nullových u funkce analytické je nutně místo zvláštní, a takovým bude tedy v případech naznačených každý bod okraje. Zejména jsem na u. m. tímto způsobem ukázal, že elliptická transcendenta

$$\vartheta_3(u \mid \omega) = 1 + 2 \sum_1^\infty q^{n^2} \cos 2nu\pi, \quad q = e^{\omega\pi i},$$

existuje toliko v oboru $|q| < 1$, t. j. pro $\omega = x + iy$, $y > 0$, pokud u je veličina skutečně komplexní; to platí následkem toho též pro funkci

$$\vartheta_0(u \mid \omega) = \vartheta_3(u + \tfrac{1}{2} \mid \omega),$$

a lze to stejným způsobem ukázati pro funkci

$$\vartheta_1 u(\mid \omega) = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} q^{(\nu-\frac{1}{2})^2} \sin (2\nu - 1) u\pi,$$

a tím též pro

$$\vartheta_2(u \mid \omega) = \vartheta_1 \left(u + \frac{1}{2} \middle| \omega\right).$$

Důkaz zmíněný zní takto: Funkce ϑ_1 a ϑ_3 jsou definovány řadami, jež konvergují pro $|q| < 1$; funkce ty vymizí, platí-li

$$u = m + n\omega,$$

kde m, n značí buď celistvá čísla aneb jejich polovičky.

Zvolím-li u dle libosti, a za číslo n hodnotu téhož znamení, jaké má pomyslná část veličiny u, bude pro hodnotu

$$\omega = \frac{u - m}{n},$$

jež má pomyslnou část kladnou, příslušná funkce $\vartheta(u \mid \omega)$ rovna nulle.

Kdyby nyní funkce $\vartheta(u \mid \omega)$ připouštěla prolongaci vůči v přes reálnou osu do jižní polovice roviny (ω), chovala by se

*) Contributions à la théorie des fonctions. Zprávy o zasedání Král. české spol. nauk z roku 1886.

pravidelně uvnitř jistého kruhu $\mathfrak{R}$, jehož střed by ležel na ose reálné. V tomto kruhu, nechť jest sebe menší, leží nekonečně mnoho bodů tvaru

$$\omega = \frac{u - m}{n},$$

jak očividno. Funkce $\vartheta(u \mid \omega)$ by tedy zmizela na nekonečně mnoha místech uvnitř oboru $\mathfrak{R}$, což vyžaduje, aby střed oboru $\mathfrak{R}$ byl bodem zvláštním; kdyby totiž hromadné místo padlo mimo střed, zmenšili bychom přiměřeně poloměr kruhu $\mathfrak{R}$. Výsledek ten však odporuje předpokladu o pravidelné povaze funkce ϑ na oboru $\mathfrak{R}$. —

Funkce $\vartheta_\nu(u \mid \omega)$ jsou zajisté první příklad funkcí s omezenou oblastí, které se v analysi vyskytly. Je dost divno, že se veškery učebnice o theorii funkcí elliptických dosud vydané této otázce o existenční oblasti vůči proměnné ω důsledně vyhnuly (pokud nejednají o funkcích modulových), ač příslušný důkaz je velmi jednoduchý.

V témž článku jsem ukázal, že funkce

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2^n \varphi}{2^n}$$

nemá derivace aspoň na místech po celém reálném oboru všehustě rozložených, jež jsou tvaru

$$\pm \frac{k\pi}{2^m} \quad (k, m \text{ kladná čísla celistvá}).$$

Na tom zakládá se fakt, že funkce

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^8}{8} + \frac{z^{16}}{16} + \dots$$

existuje toliko uvnitř kruhu $|z| \leqq 1$, kteroužto vlastnost lze ostatně rozmanitým jiným způsobem dokázati.

Na př. ukáže se to o funkci

$$z f'(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots$$

methodou mého dopisu p. *Mittag-Lefflerovi* *) aneb methodou, již jsem podal v odstavci III. svojí rozpravy **). „Über Functionen

---

*) Un théorème de la théorie des séries. Acta math. sv. X. (1887).

**) Abhandlungen der kön. böhm. Ges. der Wiss. Řady VII. svazek druhý; 1888.

mit beschränktem Existenzbereiche“, načež věta sama vychází integrací.

Jak jsem již na posledně zmíněném místě vytkl, platí pro tuto funkci očividně

$$|f(z)| \leqq 2,$$

a sice nastane rovnost toliko pro $z = 1$.

Funkce ta jest mimo to uvnitř i na okraji existenčního oboru $|z| \leqq 1$ spojitou a bod

$$Z = f(z)$$

zaplní při proměnném z určitou plochu $\mathfrak{S}$ uvnitř kruhu $|z| \leqq 2$ ležící. Probíhá-li z obvod kruhu $|z| \leqq 1$, tedy když $z = e^{i\varphi}$, bude

$$Z = \sum_0^\infty \frac{\cos 2^n\varphi}{2^n} + i \sum_0^\infty \frac{\sin 2^n\varphi}{2^n} = X + iY$$

probíhati rovněž čáru spojitou, okraj plochy $\mathfrak{S}$. Avšak „pohyb“ bodu Z takto vyvolaný vymyká se obvyklé představě o pohybu bodu na čáře, neboť zde ani *složky* rychlosti

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi}, \frac{\partial Y}{\partial \varphi}$$

neexistují, aniž *směr* pohybu (rychlosti jako vektoru) možno definovati.

Naproti tomu funkci*)

$$Z = \sum_0^\infty \frac{z^{a^n}}{n!}, \text{ (a celistvé číslo kladné)},$$

která existuje rovněž pouze na kruhu $|z| \leqq 1$, a pro niž tedy

$$|Z| \leqq e,$$

odpovídá v rovině (Z) plocha $\mathfrak{S}$ omezená čarou

$$Z = \sum_0^\infty \frac{\cos a^n\varphi}{n!} + i \sum_0^\infty \frac{\sin a^n\varphi}{n!},$$

která mění spojitě směr tečny i svoji křivost, takže ačkoli není čarou analytickou, nejeví od křivek analytických nápadného rozdílu.

*) Uvedená vlastnost je pouze jinou interpretací mých výsledků na konci mé práce otištěné ve 103. svazku Crelleova žurnálu, datované z prosince 1886. Viz Časopis 37., str. 1. a násl.