Ladislav Seifert

O jisté ploše bikvadratické, jež souvisí s theorií komplexu os rotačních ploch kuželových jdoucích třemi danými body

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 3, 230--243

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122980`

Funkce $sgn(n - 2\mu + 2\alpha)$ má vůči proměnné α přetržku $\alpha = \mu - \frac{n}{2}$, tedy výraz (9) mění svůj analytický zákon na bodech

$$\alpha_0 = \frac{n}{2},\ \alpha_1 = \frac{n}{2} - 1,\ \alpha_2 = \frac{n}{2} - 2, \ldots;$$

mezi po sobě jdoucími α jest pak H táž celistvá racionálná funkce parametru α.

Poznamenejme ještě, že pro $\frac{n}{2} - 1 < \alpha < \frac{n}{2}$ vyjde

$$H = 1 - \frac{2}{n!}\left(\frac{n}{2} - \alpha\right)^n.$$

O jisté ploše bikvadratické, jež souvisí s theorií komplexu os rotačních ploch kuželových jdoucích třemi danými body.

Napsal **Lad. Seifert**, prof. v Plzni.

O komplexu, jejž tvoří osy rotačních ploch kuželových jdoucích třemi danými body, pojednává obšírně J. B. Eck ve své dissertaci: „Über die Verteilung der Axen der Rotationsflächen 2. Grades, welche durch gegebene Punkte gehen“ [1]). V prvé části své práce rozbírá komplex rotačních os ploch druhého st. jdoucích čtyřmi body danými opíraje se o jistou větu Laguerrem dokázanou [2]), k tomu připojuje dále pojednání o komplexu os rotačních ploch válcových jdoucích dvěma a rotačních ploch kuželových jdoucích třemi body vedle řešení ještě jiných s tím souvisících otázek. Vyšetření posledního komplexu působí z důvodů na snadě ležících nejvíce obtíží, ale dá se provésti snadno užitím zajímavé plochy, jejíž vytvoření v následujícím podávám. Odvození vlastností řečeného komplexu z nejdůležitějších vlastností této plochy jest ryze synthetické a podává přehledný obraz o jakosti zde se vyskytujících geometrických míst i jejich

---

[1]) Inaugural-Dissertation, Bonn. 1890.

[2]) »Sur la courbe envelloppée par les axes des coniques qui passent par quatres points donnés et sur les axes de révolution du second ordre etc«, Nouvelles Annales de Math., 2. Serie, Bd. 18.

konstrukci, kdežto Eck spokojuje se spíše jen s povšechným stanovením jich charakteru.

I.

1. Dvěma body v prostoru A_1, A_2 jde ∞^4 rotačních kuželů neb libovolná přímka p jest osou dvou takových. Označíme-li A_1^0, A_2^0 orthogonální průměty bodů A_1, A_2 na p, jsou body M_1, M_2, dělící harmonicky úsečku A_1 A_2 takže

$$\frac{M_1 A_1^0}{M_1 A_2^0} = -\frac{M_2 A_1^0}{M_2 A_2^0} = \frac{A_1 A_1^0}{A_2 A_2^0}$$

jejich vrcholy. Jiné sestrojení vrcholů na libovolné přímce p, jehož v dalším použijeme, zakládá se na této úvaze: Rovinu symetrie kužele o vrcholu M kolmou k ose rotační seče přímka $A_1 A_2$ v bodu N_1, rovina jdoucí osou rotační kolmo ku MN_1 seče $A_1 A_2$ v bodu N_2. MN_1, MN_2 půlí úhly přímek MA_1, MA_2; N_1, N_2 oddělují harmonicky A_1, A_2. Stanovme tedy 2 roviny svazku (p) k sobě kolmé, které dělí harmonicky úsečku $A_1 A_2$ a sekou ji v bodech $N_1 N_2$. Jich orthogonální průměty na p jsou hledané vrcholy jak z hořejšího ihned plyne.

2. Libovolným bodem P v prostoru jde ∞^2 přímek. Považujeme-li je za osy rotačních kuželů obsahujících body A_1, A_2, vyplňují vrcholy příslušné plochu Φ_{12}, již lze takto vytvořiti:

Dotyčné kužele A_1, A_2 ku kouli o středu P a poloměru r dotýkají se dvakráte v průsecích R_1, R_2 poláry m přímky $R_1 R_2$ s koulí (r). Jejich průsečná křivka rozpadá se ve dvě kuželosečky protínající se v R_1, R_2 a symetrické k rovině $\pi \equiv (PA_1 A_2)$. Libovolný bod M některé z nich je skutečně vrcholem kužele opsaného kouli (r), obsahuje přímky MA_1, MA_2 a osa jeho jde bodem P. Mění-li se r, vyplňují kuželosečky průsečné tečných kuželů plochu Φ_{12} co místo vrcholů M.

3. Φ_{12} je zcela zvláštním případem obecnější plochy Φ takto vytvořené:

Buď dán svazek ploch druhého stupně (F^2), jež se dotýkají podél kuželosečky u^2 a buď U^2 společný kužel tečný o vrcholu U. Vedeme-li z libovolného bodu A_1 tečné kužele ku jednotlivým plochám tohoto svazku. dotýkají se tyto kuželosečky u^2 v bodech T_1, T_1', dotyčných to bodech rovin jdoucích přímkou

$A_1 U$ ku u^2. $A_1 T_1$, $A_1 T_1'$ jsou společné jich přímky a roviny $A_1 T_1 U$, $A_1 T_1 U$ společné roviny tečné. Kužele ty tvoří tudíž také svazek (A_1) a základní křivka jeho S_1^4 skládá se ze dvou plošných elementů $(A_1 T_1)$, $(A_1 T_1')$. Kužele z jiného bodu A_2 tvoří podobně svazek (A_2) o základní křivce (S_2^4) sestávající opět ze dvou elementů plošných $(A_2 T_2)$, $(A_2 T_2')$, který s prvým jest projektivný. Odpovídají si vždy ony kužele, jež se dotýkají téže plochy svazku (F^2). Každé dva příslušné kužele mají dvojnásobný dotyk v bodech R_1, R_2, kde polára m přímky $A_1 A_2$ ku příslušné ploše F^2 tuto seče; jejich průsečná křivka skládá se tudíž ze dvou kuželoseček a všechny tyto vyplňují plochu bikvadratickou Φ, výtvor to projektivných svazků (A_1), (A_2).

Na Φ leží základní křivky S_1^4, S_2^4 svazků (A_1), (A_2), tedy podél přímek $A_1 T_1$, $A_1 T_1'$, $A_2 T_2$, $A_2 T_2'$ má Φ společné tečné roviny jdoucí bodem U.

A_1, A_2 jsou *dvojné* body plochy Φ neb každá přímka jedním z nich A_i leží na jednom kuželu svazku (A_i) a obsahuje mimo A_i pouze 2 další body plochy, totiž průsečíky této přímky s příslušným kuželem druhého svazku.

Každý bod v rovině kuželosečky u^2 má toutéž polární rovinu vzhledem ku plochám svazku (F^2), všechny poláry m, jsou tedy v rovině ω, polární to rovině průsečíku $A_1 A_2$ s rovinou kuželosečky u^2.

ω seče (F^2) ve svazku kuželoseček (f^2); m jsou poláry bodu $(A_1 A_2, \omega)$ ku jednotlivým křivkám f^2, tvoří tedy svazek projektivný $s(f^2)$ a jejich výtvor rozpadává se, jak známo, na společnou sečnu dotyku kuželoseček f^2 a kuželosečku ω^2 jdoucí bodem U, oběma body (u^2, ω) a sekoucí $A_1 A_2$, poněvadž jedna z ploch F^2 se této dotýká.

ω^2 jest pro Φ *dvojnou kuželosečkou.* Skutečně v každé rovině přímkou $A_1 A_2$ příkladem $(A_1 A_2 R_1)$ leží dvě projektivní paprskové involuce vyťaté svazky (A_1), (A_2), které vytvořují vedle $A_1 A_2$ křivku kubickou, a poněvadž v R_1 na ω^2 sekou se odpovídající si dvojné paprsky, jest R_1, jak známo, bodem dvojným. Pro Φ jest pak R_1 buď dotyčným bodem roviny $(A_1 A_2 R_1)$ neb bodem dvojným. Nastává ovšem případ druhý, poněvadž ω^2 a následkem toho i plocha Φ_{12} rozkládá se v okolí bodu R_1 po obou stranách roviny $(A_1 A_2 R_1)$.

Přímka A_1A_2 patrně celá na ploše leží. Dotýká-li se F_2 přímky A_1A_2, mají oba příslušné kužele společný dotyk podél A_1A_2 a společná jejich tečná rovina jest také tečnou rovinou plochy Φ v každém bodu přímky A_1A_2. Řečené kužele jsou patrně *tečné kužele* dvojných bodů A_1, A_2.

Jedna plocha svazku (F^2) jest U^2, příslušné kužele jsou dvojice tečných rovin z A_1U, A_2U, dají tedy 4 přímky plochy u^2 náleží také svazku (F^2), tudíž i ploše; jest společnou křivkou obou ji promítajících kuželů vedle ještě jiné kuželosečky γ^2.

Plocha zde uvedená patří do kategorie ploch stupně 4. s dvojnou kuželosečkou a dvěma body dvojnými, leč jest zvláštním typem, poněvadž spojnice dvojných bodů tuto kuželosečku seče. Pokud nám známo, nejsou takové plochy nikde posud podrobně studovány.

Průsek plochy Φ s libovolnou rovinou je křivka stupně čtvrtého o 2 bodech dvojných (na ω^2), průsek s tečnou rovinou křivka unikursální, průsek s rovinou dvakráte se dotýkající pak dvě kuželosečky. Dva průsečíky jsou na ω^2, druhé dva jsou body dotyku. Dotýká-li se rovina plochy ve třech bodech, musí jedna z kuželoseček dále přejíti ve dvojinu přímek, eventuálně obě při dotyku čtyrnásobném Takové singulární roviny jsou u plochy Φ roviny (A_1UT_1), $(A_1UT'_1)$, (A_2UT_2), $(A_2UT'_2)$; obsahují 2 splývající přímky bodem A_1 neb A_2 a 2 oddělení bodem U.

To jsou nejdůležitější projektivné vlastnosti plochy Φ, jejímž zajímavým případem jest Φ_{12}.

4. Koule koncentrické o středu P tvoří svazek ploch se dotýkajících. Společná křivka dotyku jest absolutní kružnice $\mathfrak{K}^2$ v rovině nekonečně vzdálené, vrchol společného kuželu dotyčného jest P. Křivka dvojná ω_{12}^2 jest kružnice nad průměrem PS, kde S jest pata kolmice z P na A_1A_2. Naší ploše náleží dle předešlého přímka A_1A_2 s tečnou rovinou kolmou ku rovině symetrie $\pi \equiv (A_1A_2P)$, základní křivky S_1^4, S_2^4 což jsou dvakráte čítané přímky isotropické rovin v A_1 neb A_2 kolmých ku A_1P, A_2P a 4 (imag.) přímky z P. Tyto jsou po dvou ve dvou reálných rovinách. Jsou to totiž 4 hrany čtyrstěnu opsaného kuželu $(P\mathfrak{K}^2)$, jehož dvě protější hrany jsou PA_1, PA_2. Roviny τ, τ' spojující protější z dalších 4 hran jdou polárou roviny π, jsou sdruženy dle

$\mathfrak{K}^2$ či jsou kolmy k sobě i ku π. Poněvadž současně oddělují harmonicky PA_1, PA_2 rozpolují úhly těchto přímek. τ, τ' jsou právě tečně roviny bodu P, jak i z následujícího vysvitne. Tečné kužele dvojných bodů A_1, A_2 jsou rotační opsané kouli o středu P a poloměru $\overline{PS}$.

Kužele $(A_1\mathfrak{K}^2)$, $(A_2\mathfrak{K}^2)$ mají vedle $\mathfrak{K}^2$, jež ploše náleží, ještě společnou kružnici γ_{12}^2 v rovině symetrie γ_{12} úsečky A_1A_2 o středu O_{12} a poloměru $\overline{A_1O_{12}}\sqrt{-1}$, kde O_{12} jest půlící bod úsečky A_1A_2.

Dobrého názoru o tvaru plochy Φ_{12} nabudeme, pozorujeme-li křivku průsečnou v π. Průsečíky sečen z A_1, A_2 ku svazku koncentrických kružnic (P) tvoří kubickou křivku π^3, známou fokálu o dvojném bodu P s kolmými tečnami. Tato seče A_1A_2 v A_1, A_2, S a PO_{12} udává směr asymptoty. Jiná rovina přímkou A_1A_2 seče plochu v analogické křivce, pouze místo P nastoupí průsečík P_1 této roviny s ω_{12}^2.

Je-li M libovolný bod na π^3 a V bod, v němž PM seče A_1A_2, M' analogický bod na VP_1, není těžko dokázati, že M se všemi takto přidruženými body M' leží na kružnici. Φ_{12} obsahuje nekonečně mnoho kružnic. Každý rovinný řez má totiž kruhové body v nekonečnu za jednoduché, rozpadá-li se ve 2 kuželosečky, jest nutně jedna kružnice. Tuto soustavu kružnic dostaneme však přímo z jiného vytvoření naší plochy, jehož lze výhodně použíti v případě imaginárných konjugovaných bodů A_1A_2 neb když P jest v rovině nekonečně vzdálené.

K tomu vede nás úvaha odstavce 1. Je-li B_1, B_2 pár involuce bodové o dvojných bodech A_1, A_2, veďme přímkou PB_1 libovolnou rovinu ϱ_1; rovina ϱ_2 k ní kolmá přímkou PB_2 seče ji v r, ose to rotačních kuželů, jichž vrcholy M_1, M_2, jsou pravoúhlé průměty bodů B_1, B_2 na r. Probíhá-li ϱ_1 svazek (PB), tvoří r kužel orthogonální, M_1M_2 opisují kružnice na něm a roviny jich jdou body B_1, B_2 kolmo resp. k PB_2, PB_1; obě leží na kouli k^2 o průměru B_1B_2.

Probíhá-li B_1B_2 involuci tvoří koule k^2 svazek o základní kružnici γ_{12}^2 v rovině γ_{12}, jež v případě reálných bodů A_1, A_2 je imaginární o poloměru $\overline{A_1O_{12}}\sqrt{-1}$.

Rovněž tak tvoří orhogonální kužele (B_1B_2) svazek s (k^2) projektivní a odpovídají si plochy témuž páru B_1B_2 náležející.

Označíme-li totiž, jak v novější literatuře obyčejem nekonečně vzdálenou rovinu $\mathfrak{E}$ a nekonečně vzdálené elementy vesměs písmeny německé abecedy tedy $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ body na PA_1, PA_2, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ body na PB_1, PB_2, $\mathfrak{A}_{12}$, bod na A_1A_2, $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ přímky v ϱ_1, ϱ_2, musí $\mathfrak{r}_2$ obsahovati nekonečně vzdálený bod kolmice ku ϱ_1, t. j. pól $\mathfrak{R}_1$ přímky $\mathfrak{r}_1$ ku $\mathfrak{K}^2$; $\mathfrak{r}_1$ opisuje současně s ϱ_1 svazek ($\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{E}$), $\mathfrak{R}_1$ řadu projektivní, $\mathfrak{r}_2 \equiv (\mathfrak{B}_2\mathfrak{R}_1)$ tedy také svazek s ($\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{r}_1$) projektivní. ($\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{r}_1$), ($\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{r}_2$) tvoří kuželosečku $\mathfrak{b}_{12}^2$. Kuželosečky takto příslušné všem párům B_1B_2 tvoří svazek; vrcholy jeho $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ jsou průsečíky tečen z $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ na $\mathfrak{K}^2$. Skutečně spojnice některého $\mathfrak{S}_i$ s libovolným párem $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ jsou sdruženy dle $\mathfrak{K}^2$, jest tedy $\mathfrak{S}_i$ na $\mathfrak{b}_{12}^2$. Tyto kuželosečky tvoří tedy svazek v $\mathfrak{E}$ a rovněž tak kužele, jež je z P promítají.

Z tohoto vytvoření plochy Φ_{12} mohli bychom odvoditi všechny vlastnosti jako dříve, což pomíjíme. Uvedeme pouze, že kužel (O_{12}, $\mathfrak{A}_{12}$) dá v γ_{12} reálnou kružnici a jednu kuželosečku β_{12}^2 v $\mathfrak{E}$. Jedna koule svazku (k^2) jde bodem P a kužel příslušný rozpadá se ve 2 k sobě kolmé roviny, tečné to roviny bodu P. — π^3 jeví se nyní co výtvor svazku kružnic (k^2) s projektivním svazkem paprsků. Koule k^2 má s příslušným kuželem B_1B_2 a ještě další 2 body N_1, N_2 v π. P jest vrchol diagonálního trojúhelníka čtyrrohu $B_1B_2N_1N_2$, protější diagonála co polára bodu P jde stálým bodem P^0, N_1N_2 tudíž stálým bodem, jenž dle P_1P_0 jest harmonicky sdružen s průsečíkem (A_1A_2, PP_0).

5. Pro druhou část tohoto pojednání jsou důležity degenerace plochy Φ_{12} pro zvláštní polohy bodu P, jež zde stručně uvádíme, příliš jednoduché důkazy pomíjejíce.

a) P v rovině symetrie γ_{12}; Φ_{12} se rozpadá v rovinu γ_{12} a plochu Ψ_{12} st. třetího o dvojných bodech A_1, A_2, obsahující S_1^4, S_2^4, $\mathfrak{K}^2$ i A_1A_2. Každé dvě kružnice sekou se nyní v týchž dvou bodech přímky r, poláry bodu P ku γ_{12}^2. π^3 rozpadá se v ($O_{12}P$) a kružnici body A_1, A_2, P.

b) P na přímce (A_1A_2); tečné roviny z PA_1, PA_2 ku $\mathfrak{K}^2$ splývají po dvou, jsou částí plochy. Máme tedy dvě roviny α_{12}^1, α_{12}^2 přímkou (A_1A_2) jdoucí a $\mathfrak{K}^2$ se dotýkající a plochu kulovou nad průměrem PP_1, kde P_1 tvoří s P a A_1, A_2 harmonickou čtveřinu.

c) Pro $P \equiv O_{12}$ přejde ještě uvedená plocha kulová v γ_{12} a $\mathfrak{C}$.

d) Zajímavý a důležitý je případ, že P leží v rovině nekonečně vzdálené. Značme jej $\mathfrak{P}$, ω' buď rovina jdoucí přímkou $O_{12}\mathfrak{P}$ kolmo ku $\pi \equiv (A_1 A_2 \mathfrak{P})$. Místo svazku kuželů máme svazek rotačních válců; základní jeho křivka jsou 2 přímky v ω' a 2 tečny z $\mathfrak{P}$ ku $\mathfrak{K}^2$. Tento svazek se svazkem koulí (k^2) stanoví plochu, ježto však odpovídají si koule $(\gamma_{12}, \mathfrak{C})$ a válec $(\omega', \mathfrak{C})$, jest $\mathfrak{C}$ částí plochy vytvořené a doplněk je plocha st. třetího Σ_{12} o dvojných bodech A_1, A_2. Obsahuje přímky $A_1 A_2$, (γ_{12}, ω'), křivky γ_{12}^2, S_1^4, $S_2^{4\prime}$ co jsou nyní dvakrát čítané isotropické přímky rovin body A_1, A_2 kolmo ke směru $\mathfrak{P}$ jdoucích.

Průsek s rovinou symetrie π jest $A_1 A_2$ vedle hyperboly rovnostranné o středu O_{12} a asymptotě $O_{12}\mathfrak{P}$. Čtyřúhelník $B_1 B_2 N_1 N_2$ je totiž pravoúhelníkem, $N_1 N_2$ je průměrem kružnice k^2, má pro všechny k^2 týž směr a křivka dříve značená π^3 přejde nyní v onu hyperbolu a přímku v nekonečnu.

Máme-li na mysli dvě kružnice $(B_1 N_1)$, $(B_2 N_2)$ téhož válce $(B_1 B_2)$ a sečeme-li plochu libovolnou rovinou jdoucí přímkou $A_1 A_2$, seče tato kouli $(B_1 B_2)$ v kružnici k^2, obě kružnice v bodech N'_1, N'_2 a jich spojnice má opět pro všechny kružnice k^2 této roviny týž směr. Ony samy opisují opět hyperbolu rovnostrannou. Směr asymptot jest $B_1 N'_1$, $B_1 N'_2$, směr tečny bodu A_1 jest $N'_1 N'_2$. Jedna z prvých dvou $B_1 N'_1$ má směr kolmý k $O_{12}\mathfrak{P}$, druhá, probíhá-li průsečná rovina svazek $(A_1 A_2)$, promítá jednotlivé body kružnice $(B_2 N_2)$, $N'_1 N'_2$ opisuje kužel rotační. Sestává tedy křivka v nekonečnu naší plochy z přímky $\mathfrak{e}$, poláry bodu $\mathfrak{P}$ ku $\mathfrak{K}^2$ a kuželosečky σ_{12}^2, jež se promítá kuželem orthogonálním s rovinou symetrie π a řezy kruhovými kolmými ku $\mathfrak{P}O_{12}$, resp. $A_1 A_2$. Asymptotická rovina přímky $\mathfrak{e}$ jde bodem O_{12}.

ω' jest tečná rovina bodu $\mathfrak{P}$, tečné kužele dvojných bodů jsou rotační s osami $A_1\mathfrak{P}$, $A_2\mathfrak{P}$ a dotýkají se podél $A_1 A_2$.

e) Pro $\mathfrak{P}$ ve směru kolmém ku $A_1 A_2$ dotýká se koule vždy s příslušným válcem Σ_{12} je dvojnásobná rovina $\sigma \perp \pi$ s rovinou γ_{12}.

f) Pro $\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{A}_{12}$ máme jako v *c*) α_{12}^1, α_{12}^2, γ_{12}, $\mathfrak{C}$.

6. Plocha Φ_{12} a její degenerace podávají nyní jasný přehled o rozložení vrcholů v prostoru. Můžeme vytknouti však i význam jednotlivých význačných čar těchto ploch a poznáváme zároveň, jakou úlohu zde mají různé degenerace rotační plochy kuželové.

Každá přímka bodem P seče Φ_{12} ve dvou vrcholech rotačních kuželů, jichž jest osou. Jeden z těchto splyne s P, je-li přímka v jedné z obou k sobě kolmých tečných rovin bodu P. Všechny kužele vrcholu P tvoří tudíž dva k sobě kolmé svazky, další vrcholy na nich tvoří dvě kružnice. Každá jiná rovina bodem P seče Φ_{12} v křivce st. 4. Příslušné konstrukce a vlastnosti té křivky plynou z odstavce 4.

V $\mathfrak{E}$ má Φ_{12} kromě $\mathfrak{K}^2$ ještě reálnou kuželosečku β_{12}^2. Kužel s vrcholem v nekonečnu jest válec rotační a máme tedy co vedlejší výsledek:

Osy válců rotačních obsahujících A_1, A_2, jež jdou bodem P, tvoří orthogonální kužel $(O_{12}\mathfrak{A}_{12})$, čili

Osy rotačních válců, které obsahují dva body A_1, A_2, tvoří komplex kvadratický. Tento je zvláštním případem obecného tetraedrálného komplexu a jest obšírně v citovaném pojednání Eckově i jinde studován.

Spojnice P s libovolným M na ω_{12}^2 jest kolmá k (A_1A_2M). Oba kužele přešly zde patrně v rov. (A_1A_2M), již sluší čítati dvakráte. Skutečně definujeme plochu rotační jako takovou, jež s $\mathfrak{K}^2$ zná dvojnásobný dotyk. Roviny jdoucí sečnou dotyku jsou řezy kruhové. Dvojinu rovnoběžných rovin sluší také mezi ně čítati, poněvadž má s $\mathfrak{K}^2$ dvakrát dva splývající body společné. Osa jde pólem $\mathfrak{P}$ sečny dotyku $\mathfrak{p}$, jež v případě kužele (válce) na ploše leží. Při rovnoběžných rovinách lze každý bod roviny, jež půlí vzdálenost obou, považovati za střed. Chceme-li tuto dvojinu považovati za kužel, musíme za vrchol vzíti některý bod na $\mathfrak{p}$ a za osu spojnici jeho s $\mathfrak{P}$. Osu v konečnu dostaneme pouze, splynou-li obě neb dotýká-li se $\mathfrak{p}$ křivky $\mathfrak{K}^2$. Dle toho kruhové body $\mathfrak{U}_{12}^1$, $\mathfrak{U}_{12}^2$ na ω_{12}^2 mají mezi ostatními zvláštní postavení, neb $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{U}_{12}^i)$ lze ve spojení s každou s ní rovnoběžnou rovinou považovati za kužel středu $\mathfrak{U}_{12}^i$ a osy $\mathfrak{P}\mathfrak{U}_{12}^i$. — Libovolný bod $\mathfrak{S}$ s tečnou $\mathfrak{s}$ na $\mathfrak{K}^2$ jest vrcholem kuželu sestávajícího z rovin $A_1\mathfrak{s}$, $A_2\mathfrak{s}$ o ose $P\mathfrak{S}$. Každý bod Y jedné z křivek S_1^4, S_2^4 jest vrcholem dvou kuželů splývajících, poněvadž se v něm oba průsečíky přímky PY s Φ_{12} sjednocují.

Zde buď též připomenuto, že i parabolický válec nutno čítati mezi rotační plochy z téhož důvodu co dvojinu rovnoběžných rovin. Jestli $\mathfrak{p}$ hrana dotyku z $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{S}$ vrchol, $\mathfrak{S}_1$ bod s ním dle $\mathfrak{K}^2$ na $\mathfrak{p}$ sdružený, jest dle analogie s obecnou plochou $\mathfrak{S}_1$ střed, $\mathfrak{S}_1\mathfrak{P}$ osou plochy. Jenom když $\mathfrak{S}_1\mathfrak{P}$ jest s $\mathfrak{S}$ incidentní, možno čítati válec parabolický mezi rotační kužele, tudíž jen takové, kde vrchol $\mathfrak{S}$ leží $\mathfrak{K}^2$. Osa splývá pak s příslušnou tečnou $\mathfrak{s}$ (Viz Eck, l. c. str.. 116)

Zajímavá je interpretace plochy Σ_{12}. Svazek $\mathfrak{P}$ v tečné rovině ω' obsahuje osy rotačních válců o středu $\mathfrak{P}$. Také svazek ($\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$) má podobný význam. Každá přímka $\mathfrak{p}$ bodem $\mathfrak{P}$ jest dvojnou páru rovin $(A_1\mathfrak{p})$, $(A_2\mathfrak{p})$, $\mathfrak{P}$ jako každý bod na $\mathfrak{p}$ lze považovati za střed, spojnici jeho s pólem $\mathfrak{P}_1$ přímky $\mathfrak{p}$ za osu; jest tudíž každý paprsek svazku ($\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$) osou s příslušným vrcholem $\mathfrak{P}$.

Přímka $\mathfrak{e}$ co dvojná rovin $(\mathfrak{e}A_1)$, $(\mathfrak{e}A_2)$ jest místem vrcholů zvrhlého kužele $(\mathfrak{e}A_1)$, $(\mathfrak{e}A_2)$ a každá přímka bodem $\mathfrak{P}$ jeho osou.

Konečně všechny roviny α přímkou A_1A_2 ve spojení s libovolnou rovnoběžnou rovinou (neb s $\mathfrak{E}$) jsou rotačními kuželi. Stopa $\mathfrak{a}$ na $\mathfrak{E}$ jest dvojnou přímkou, všechny paprsky jejím pólem $\mathfrak{A}$ lze považovati za osy, tedy i $\mathfrak{P}\mathfrak{A}$. Průsečík $\mathfrak{P}\mathfrak{A}$ s $\mathfrak{a}$ jest tedy vrchol, jejž nutno v úvahu vzíti; $\mathfrak{a}$ opisuje svazek současně s α, $\mathfrak{A}$ řadu projektivní, $\mathfrak{P}\mathfrak{A}$ tedy svazek přímek sdružených s $\mathfrak{A}_{12}(\mathfrak{a})$. Výtvor jich jest kuželosečka, toť dle úvahy od. 4. a 5. *a*) právě kuželosečka σ_{12}^2 plochy Σ_{12}.

II.

1. Vrcholy všech rotačních kuželů procházejících třemi body A_1, A_2, A_3, jichž osy jdou pevným bodem P, tvoří křivku nacházející se současně na plochách Φ_{12}, Φ_{13}, Φ_{23}, kde Φ_{13}, Φ_{23} jsou právě tak z A_1, A_3, P, — A_2, A_3, P odvozeny jako Φ_{12} z A_1, A_2, P. Plochy Φ_{12}, Φ_{13} mají společný průsek stupně 16. Ten skládá se z $\mathfrak{K}^2$, S_1^4 a křivky K_{123}^{10} stupně *10*. která jest hledaným geometrickým místem. Skutečně každý bod její M jsa na Φ_{12} jest vrcholem kužele body A_1, A_2 o ose MP, jenž jde i bodem A_3, poněvadž M jest na Φ_{13}. Odtud jde, že M jest též na Φ_{23}.

Dvojné kružnice ω_{12}^2, ω_{13}^2, ω_{23}^2 sekou se v P a v O, patě kolmice z P na $\alpha \equiv (A_1 A_2 A_3)$. Tyto jsou pro K_{123}^{10} *čtyrnásobnými* body. Kružnice (imag.) γ_{12}^2, γ_{13}^2, γ_{23}^2 sekou se, jak známo, ve dvou bodech T_1, T_2, jednoduchých bodech křivky K_{123}^{10}. Takovými jsou též body $\mathfrak{U}_{12}^1$, $\mathfrak{U}_{12}^2$, $\mathfrak{U}_{13}^1$, $\mathfrak{U}_{13}^2$, $\mathfrak{U}_{23}^1$, $\mathfrak{U}_{23}^2$ na $\mathfrak{K}^2$, jak již z významu jejich v odstavci 6. I. vytčeném plyne. Máme tedy větu:

Geometrické místo vrcholů rotačních kuželů obsahujících 3 dané body $A_1 A_2 A_3$, jichž osy jdou pevným bodem P, jest křivka stupně 10., jež má P a patu O kolmice z P na $\alpha \equiv (A_1 A_2 A_3)$ za body čtyrnásobné, T_1, T_2, $\mathfrak{U}_{12}^1$, $\mathfrak{U}_{12}^2$, $\mathfrak{U}_{13}^1$, $\mathfrak{U}_{13}^2$, $\mathfrak{U}_{23}^1$, $\mathfrak{U}_{23}^2$, za jednoduché. Tečny bodu P jsou osy čtyř rotačních kuželů s vrcholem P.

K_{123}^{10} promítá se z P kuželem st. šestého, jenž PO má co hranu čtyrnásobnou, PT_1, P_2T_2, $P\mathfrak{U}_{12}^1$, $P\mathfrak{U}_{12}^2$, . . . co hrany jednoduché. Každá hrana mimo PO je osou a příslušný bod na K_{123}^{10} vrcholem pouze jednoho kužele.

Komplex os rotačních ploch kuželových jdoucích body $A_1 A_2 A_3$ jest stupně šestého. Komplexní kužel má vždy hranu $P\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{C}$ bod nek. vzdál. kolmice ku α) za *čtyrnásobnou*, každou z hran PT_1, PT_2, $P\mathfrak{U}_{ik}^{\nu}$ ($i, k = 1, 2, 3$ — $\nu = 1, 2$) za jednoduchou.

V libovolné rovině tvoří osy křivku komplexní *šesté třídy.*

Každý svazek prostorový, jehož paprsky vesměs náleží komplexu, slove *singulární* a právě tak rovina, jejíž každý paprsek jest paprskem komplexu.

Poněvadž kužel (P^6) pro každou polohu bodu P obsahuje paprsek každého svazku $\mathfrak{C}$, T_1, T_2, $\mathfrak{U}_{ik}^{\nu}$, jsou tyto *singulárními* a sice náleží $\mathfrak{C}$ komplexu *čtyřikráte*, ostatní pouze jednoduše. Vrcholy paprsků svazku ($\mathfrak{C}$) jsou příslušné stopy v α, ostatní mají vrcholy ve svých středech, jak z předešlého dostatečně jasno.

2. Roviny singulární najdeme, pozorujeme-li degenerace kužele (P^6) a křivky K_{123}^{10} pro zvláštní polohy bodu P.

a) P v γ_{12}, nikoli však na průsečnici c rovin symetrie γ_{12}, γ_{13}, γ_{23}. Φ_{13}, Ψ_{12} (viz od. 5. *a*) I.) mají kromě $\mathfrak{K}^2$, S_1^4 společnou křivku K_{12}^6 st. 6, jež současně jest na Φ_{23}. P, O má za dvojné, $\mathfrak{U}_{13}^{v}$, $\mathfrak{U}_{23}^{v}$ za jednoduché body. γ_{12}, Φ_{13}, Φ_{23} mají průsek st. 4. s dvojnými body P, O.

Kužel (P^6) rozpadá se tedy v kužel (P_{12}^4) st. 4 obsahující K_{12}^6 s dvojnou hranou $P\mathfrak{C}$ a svazek (P, γ_{12}), jejž nutno dvakráte čítati, ježto na každém paprsku jeho leží 2 vrcholy.

Totéž platí ovšem o bodech rovin γ_{13}, γ_{23}.

b) Padne-li P do průsečnice c nikoli však do T_1, T_2, $\mathfrak{C}$, jest tato částí průsečné křivky majíc každý svůj bod za vrchol kužele, jehož jest osou. Ψ_{13}, Ψ_{23} mají s γ_{12} společnou křivku st. třetího, která s $\mathfrak{K}^2$, S_3^4 tvoří úplný jich průsek. Podobné křivky jsou v rovinách γ_{23}, γ_{13} a K_{123}^{10} skládá se tudíž z c a křivek K_{12}^3, K_{13}^3, K_{23}^3 v rovinách γ_{12}, γ_{13}, γ_{23}. (P^6) rozpadá se ve 3 dvojnásobné svazky (P, γ_{12}), (P, γ_{13}), (P, γ_{23}).

c) P na A_1A_2 (totéž platí o A_1A_3, A_2A_3). K^{10} rozpadá se v *křivku st. 6.*, průsek to Φ_{13} s koulí (k_{12}^2) o dvojném bodu P a 4 přímky bodem P, jež po dvou jsou v rovinách α_{12}^1, α_{12}^2. Toť jsou přímky plochy Φ_{13}, o nichž byla řeč v odstavci 4. I. a jež jsou po 2 v reálných rovinách τ, τ'. (P^6) jest tedy složeno z kužele st. 4. a 2 svazků τ, τ', o čem snadno lze se přesvědčiti.

d) Pro $P \equiv O_{12}$ rozpadne se ještě uvedená v *c*) křivka prostorová st. 6. v křivku *rovinnou st. 4.* průsek (Φ_{13}, γ_{12}) a kuželosečku $\beta_{13} \equiv \beta_{23}$ v $\mathfrak{C}$, kužel st. 4. pak v *dvojnásobný svazek* (P, γ_{12}) a *orthogonální kužel* $(O_{13}\mathfrak{A}_{13})$.

e) $\mathfrak{P}$ v rovině $\mathfrak{C}$, nikoli však v přímce $\mathfrak{a} \equiv (\alpha, \mathfrak{C})$ ani v některém bodu $\mathfrak{A}_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3, i \neq k)$, ani ve směru kolmém k některé z přímek A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3.

Všechny 3 plochy Σ_{12}, Σ_{13}, Σ_{23} mají společnou (dle od. 4. *a*) I.) přímku $\mathfrak{c}$ v $\mathfrak{C}$ a vedle toho ještě *křivku st. 4.* jdoucí bodem $\mathfrak{P}$. Tuto dostaneme vedle S_1^4 a $\mathfrak{c}$ co průsečnou čáru ploch Σ_{12}, Σ_{13}. Bod $\mathfrak{P}$ jest pro ni jednoduchým a jeho tečna $T_{\mathfrak{p}}$ jest osou válce body A_1, A_2, A_3 jdoucího.

Zvláštní úvahu třeba učiniti o rovině $\mathfrak{C}$. Přímka $\mathfrak{c}$, polára $\mathfrak{P}$ ku $\mathfrak{K}^2$ nemá patrně pro komplex významu, ježto roviny $\mathfrak{c}A_1$, $\mathfrak{c}A_2$, $\mathfrak{c}A_3$ nesplývají. Dle od. 6. I. lze každou přímku $\mathfrak{p}$ svazku $(\mathfrak{P}, \mathfrak{C})$ považovati za dvojnou dvojiny rovnoběžných rovin $(\mathfrak{p}A_1, \mathfrak{p}A_2)$, $(\mathfrak{p}A_1, \mathfrak{p}A_3)$ neb $(\mathfrak{p}A_2, \mathfrak{p}A_3)$ a přímku pólem jejím $\mathfrak{P}_1$ za osu. Obsahuje-li $\mathfrak{p}$ jeden z bodů $\mathfrak{A}_{ik}$, jest přímka $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ osou dvojiny $(\mathfrak{P}A_iA_k, \mathfrak{p}A_l)$, tedy paprskem komplexu. Také bodem v nekonečnu $\mathfrak{P}$ jdou tudíž 4 přímky komplexu mající jej za příslušný vrchol. Toliko jedna $T_\mathfrak{p}$ jest však v konečnu.

Dle od. 6. I. jest na každé přímce $\mathfrak{p}$ bodem $\mathfrak{P}$ průsečík $\mathfrak{R}_3$ se σ_{12} vrcholem kužele, jenž sestává z $\mathfrak{R}_3 A_1 A_2$ a libovolné roviny rovnoběžně příkladem $(\mathfrak{p}A_3)$ Totéž platí o $\mathfrak{R}_2$ na σ_{13} a $\mathfrak{R}_1$ na σ_{23}. $\mathfrak{p}$ patří tedy *třikráte* komplexu a příslušná *vrcholová křivka* skládá se ze *3 kuželoseček* vytvořených projektivnými svazky paprsků dle $\mathfrak{K}^2$ sdružených o středech $\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{A}_{12}$, resp. $\mathfrak{A}_{13}$, $\mathfrak{A}_{23}$. Všechny tři mají společný bod $\mathfrak{P}$ a průsečíky jeho poláry s $\mathfrak{K}^2$. Tečny oněch 3 kuželoseček σ v $\mathfrak{P}$ jsou 3 osy s vrcholem $\mathfrak{P}$, o nichž byla řeč výše. (Eck konstatuje l. c. 118, že ona křivka je st. 6. s trojným bodem $\mathfrak{P}$.)

(P^6) skládá se zde z *válce kubického* vrcholu $\mathfrak{P}$ a třikráte čítaného svazku $(\mathfrak{P}, \mathfrak{E})$.

f) Pro $\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{A}_{12}$ mají Σ_{13}, Σ_{23} vedle S_3^4, $\mathfrak{e}$ a obou přímek (základních tvořícího svazku válců) ve společné tečné rovině $\omega'_{13} \equiv \omega'_{23}$ kuželosečku v γ_{12} jdoucí body T_1, T_2. Svazek $(\mathfrak{P})$ v tečné rovině společné a kužel tuto promítající jsou částí kuželu $(\mathfrak{P}^6)$. σ_{12} rozpadá se zde ve 2 přímky $\mathfrak{a}_{12}^1 \equiv (\alpha_{12}^1 \mathfrak{E})$, $\mathfrak{a}_{12}^2 \equiv (\alpha_{12}^2 \mathfrak{E})$, tečny z $\mathfrak{P}$ na $\mathfrak{K}^2$. σ_{13}, σ_{23} mají společnou tečnu v bodu $\mathfrak{P}$, jež je sdružena s přímkou $\mathfrak{a} \equiv (\alpha_1 \mathfrak{E})$ dle $\mathfrak{K}^2$.

g) Pro $\mathfrak{P}$ na přímce $\mathfrak{c}_{12} \equiv (\gamma_{12}, \mathfrak{E})$ mají obě plochy spol. dotyk v $\mathfrak{e}$ a společnou asymptotickou rovinu. σ_{12} skládá se z $\mathfrak{e}$ a $\mathfrak{c}_{12}$.

h) Pro $\mathfrak{P}$ na $\mathfrak{a}$ jest jedině $\mathfrak{P}\mathfrak{E}$ osou.

Každá tečna $\mathfrak{t}$ z bodu $\mathfrak{P}$ na $\mathfrak{K}^2$ seče v dotyčném bodu $\mathfrak{T}$ všechny 3 kuželosečky σ. Všechny 3 uvažované kužele degenerované (parabolické válce) mají tedy v $\mathfrak{T}$ spol. vrchol s osou $\mathfrak{t}$. Také však čtvrtá osa s vrcholem $\mathfrak{P}$, jež v jiném případě leží v konečnu, splývá zde, jak snadno lze usouditi s $\mathfrak{t}$. Tečny $\mathfrak{t}$ křivky $\mathfrak{K}^2$ čítáme proto co *čtyrnásobné* paprsky komplexu (Eck str. 118).

(O případu *f)* píše *Eck* opět nesprávně, že místem geometrickým vrcholů v $\mathfrak{E}$ jest vedle $\mathfrak{a}_{12}^1$, $\mathfrak{a}_{12}^2$ křivka 4. st., která jednoduše bodem $\mathfrak{P}$ prochází.)

3. Z posledního odstavce plynou výsledky:

Roviny γ_{12}, γ_{13}, γ_{23} jsou *singulárními* rovinami komplexu a každá jest rovinou *dvojnásobnou*, ježto každý paprsek její nese dva vrcholy a jest osou dvou kuželů (viz 2. *a*).

$\mathfrak{E}$ *je singulární rovinou trojnásobnou* (viz 2. *e*). Má však ještě vyšší singularitu záležející v tom, že každý bod na $\mathfrak{K}^2$ jest vrcholem ∞^1 parabolických válců body $A_1 A_2 A_3$ s příslušnou tečnou co osou, jiţ nutno dle předešlého čtyřikráte čítati, a že též paprsky svazku ($\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$) nutno čtyřnásobně čítati co osy kuželů sestávajících z dvou rovin, z nichž jednou jest α. Tyto paprsky svazku ($\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$) a tečny $\mathfrak{K}^2$ jsou tedy *čtyrnásobnými paprsky* komplexu.

Právě jako některé body mají význačné postavení tím, že jich kužele komplexní se degenerují, mají i některé roviny význačné postavení degenerováním příslušné křivky komplexní. To platí o α a rovinách jdoucích některou z přímek $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_2 A_3$. Důkazy, jež jsou zcela elementární, pomíjíme odkazujíce na citovanou práci Eckovu, připomínáme jen obecně, co z našich úvah plyne, že křivka komplexní $(\varrho)^6$ v lib. rovině ϱ má přímku (ϱ, $\mathfrak{E}$) za *trojnásobnou*, každou z $(\gamma_{12}\mathfrak{E})$, $(\gamma_{13}\mathfrak{E})$, $(\gamma_{23}\mathfrak{E})$ za *dvojné* tečny. Vrcholy příslušné vyplňují kř. 6tého st. (Eck, str. 125).

III.

Z těchto úvah snadno též lze odvoditi stupeň kongruence, již tvoří osy rotačních ploch kuželových jdoucích čtyřmi body A_1, A_2, A_3, A_4. Vrcholy jejich jsou body společné plochám Φ_{12}, Φ_{13}, Φ_{14}. Tyto však mají společné křivky $\mathfrak{K}^2$, S_1^4. Křivka prve vyznačená K_{123}^{10} obsahující vrcholy kuželů body A_1, A_2, A_3 seče Φ_{14} ve $4 \,.\, 10 = 40$ bodech. Z toho však na $\mathfrak{K}^2$ leží 6 bodů $\mathfrak{U}_{ik}^{r}$ na S_1^4 dalších 12 neb S_1^4 má s Φ_{23} kromě 4 bodů na $\mathfrak{K}^2$ ještě 12 bodů společných, jež co body společné plochám Φ_{12}, Φ_{13}, Φ_{23} leží na K_{123}^{10}. Máme tedy zbylých $40 - 12 - 6 = 22$ průsečíků. Bod P jest však čtyřnásobným pro K_{123}^{10} a dvojným pro Φ_{14}, pohlcuje tedy $2 \,.\, 4 = 8$ průsečíků. Pouze dalších 14 jsou hledané vrcholy.

Řečená kongruence jest tedy stupně 14.

Buď $\mathfrak{P}$ v rovině nekonečně vzdálené. Plochy Σ_{12}, Σ_{13}, Σ_{14} mají poláru jeho $\mathfrak{e}$ ku $\mathfrak{K}^2$ za společnou přímku. Prvé dvě mají též S_1^4 vedle křivky K_{123}^4 st. 4. Tato má s S_1^4 společných

8 bodů, společných totiž bodů S_1^4 a Σ_{23} mimo 4 na $\mathfrak{e}$. Sečе tedy Σ_{14} v dalších $4 \cdot 3 - 8 = 4$ bodech. Jeden z nich jest $\mathfrak{P}$ a další 3 jsou vrcholy kuželů body A_1, A_2, A_3, A_4. Tudíž:

Pouze 3 z os bodem $\mathfrak{P}$ jdoucích jsou v konečnu, ostatních 11 jest v rovině nekonečně vzdálené.

Tyto věty dokazuje Eck užitím vět o komplexu os ploch rotačních st. 2. jdoucích body A_1, A_2, A_3, A_4 a rovněž tak větu, že uvedená kongruence jest šesté třídy. Bylo by zajisté záhodno také tuto druhou část dokázati neodvisle od onoho komplexu, co se nám však na základě těchto úvah dosti jednoduše nepodařilo.

Uvedení v II. větu thermodynamickou.

Napsal Dr. **Jos. Theurer,** ř. professor báňských vysokých škol v Příbrami.

Při studiu thermodynamiky skýtá hlavní obtíže II. věta thermodynamická, a to zejména pro případ dějů nepřevratných. Všeobecně vykládá se v učebnicích nejprve thermodynamika dějů převratných, a teprve když tyto děje obšírně byly probrány, připojuje se krátká poznámka, týkající se dějů nepřevratných. Tím zajisté nevzbudí se dojem, že právě děje nepřevratné jsou daleko důležitějšími a všeobecnějšími, než děje převratné, ba že jsou jedinými, jež ve skutečnosti existují, kdežto děje převratné jsou pouhým ideálním, neexistujícím případem.

Povzbuzen pracemi, jež v nejnovější době ve směru tom konali Buckingham, Orr, Planck a j., hlavně však Swinburne, pokusil jsem se, podati nový úvod k II. větě thermodynamické, zejména pak k větě o vzrůstu entropie, k jejíž definici užito způsobu Swinburne-ova. Hlavní obtíž, proč tak nesnadno jest, vniknouti v podstatu II. věty, ba proč tak často stýkáme se i s názory mylnými, shledávám jednak v přílišné stručnosti, s níž se děje nepřevratné vůbec odbývají, jednak v přílišné abstraktnosti, jež prvému studiu málo svědčí, konečně pak v okolnosti už naznačené, že totiž studium dějů nepřevratných se koná jen jako přívěsek studia dějů převratných, namístě aby se vycházelo od dějů nepřevratných a poukázalo k dějům převratným jako k speciálnímu, ideálnímu, ve skutečnosti však ne-