Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr
O rovnicích differenciálních pro invariantní útvary

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 3, 261--276

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122978

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1908

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

t. j. pro děje nepřevratné *neznázorňuje* již plocha diagrammu „tepelného“ množství přijatého tepla, nýbrž jest *větší.* Proto nelze z velikosti její souditi na množství tepla, takže pro děje nepřevratné diagrammy ty *neznamenají* již teplo přijaté. Toho třeba dbáti za příčinou uvarování omylů.

Další přechod k dějům cyklickým. Protože při ději cyklickém se hmota vrátí v původní stav, tudíž i její entropie, plyne z hořejší nerovnice přímo, že

$$(\text{cykl})\int \frac{dQ_{irr}}{T} < 0.$$

K tomu lze snadno připojiti nauku o *nezískané práci,* thermodynamických potenciálech atd., jak obvyklo.

Po tomto uvedení v podstatu dějů nepřevratných a jejich thermodynamiky, jež vykonáno pouze pojmově, kvalitativně, mělo by následovati uvedení kvantitativní, jež — jak přirozeno — by bylo značně rozsáhlejší. Poukazuji v té příčině na nedávno vyšlou knihu F. Krausse „Die Thermodynamik der Dampfmaschinen“ (Berlin 1907, Julius Springer), kdež postupný vzrůst entropie při parním stroji určité typy jest numericky propočítán pro všecky fase jednoho oběhu.

O rovnicích differenciálních pro invariantní útvary.

Napsal **K. Petr.**

V následujícím rozšířeny některé výsledky a pojmy z nauky o formách binárních na formy n-ární; hlavně ty, které týkají se rovnic differenciálních, jimž tyto útvary hoví, a pojmu semiinvariantu. Toto rozšíření může býti podáno různým způsobem. Tak Deruyts a Capelli *) dokazují pro n-ární formy větu, že nutná a postačující podmínka, aby I bylo invariantním útvarem, jest (nehledě k požadavkům homogenity a isobarity) dána rovnicemi

$$(a) \qquad \Delta_{12} I = 0, \quad \Delta_{23} I = 0, \ldots \Delta_{n-1,n} I.$$

---

*) *J. Deruyts,* Essai d'une théorie générale des formes algébriques str. 48., Mémoires de la société r. des sc. de Liège. II. série t. XVII.

A. Capelli, Lezioni sulla teoria delle forme algebriche, 1902, str. 219.

V následujícím dokázáno, že místo tohoto systému postačí při invariantních útvarech požadovati systém

(b) $\Delta_{12} I = 0, \quad \Delta_{13} I = 0, \ldots \Delta_{1,n} I = 0.$

Systém (b) jest jednodušší, neboť operace Δ_{1k} ($k = 1, 2, 3, \ldots n$) jsou operace záměnné; operace pak v (a) na levých stranách se vyskytující záměnny nejsou.

Pojem semiinvariantu rozšiřuji tím, že nazývám semiinvariantem funkcí koefficientů S homogenní, dle jednotlivých indexů isobarickou a hovící rovnicím

$$\Delta_{12} S = 0, \quad \Delta_{13} S = 0, \ldots \Delta_{1n} S = 0$$

a ukazuji, že každý semiinvariant jest vedoucím členem invariantního útvaru.

Důkazy těchto a jiných s tím souvisících vět podávám, vycházeje z definice invariantního útvaru na základě jisté pomocné věty (v odst. I.) Obyčejně se odvození rovnic differenciálních provádí tím, že se ukáže, že lineárná substituce dá se rozložiti v řadu jednoduchých substitucí a najdou se podmínky invariability pro tyto jednoduché substituce, věty pak další odvozují se na základě různých a dosti komplikovaných vztahů mezi operacemi Δ_{ik}*).

V článku jiném hodlám použíti výkladů následujících na vyšetřování vztahující se ke stanovení počtu invariantních útvarů příslušných k dané formě.

I.

Nejprve dokáži větu, o niž opírají se vývody odstavců následujících. Budeme uvažovati formy několika řad proměnných n-árních. Řadou proměnných n-árních vyrozumíváme n-proměnných $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$; forma pak závislá na této řadě jest racionálnou celistvou a homogenní funkcí těch proměnných. Forma může záviseti na několika řadách, různé řady odlišovati budeme indexy nahoře připojenými a označovati budeme n proměnných $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots \xi_n^{(1)}$ jedné takové řady zkrátka ($\xi^{1)}$). Závisí-li forma

*) V »*Gordan's* Vorlesungen über Invariantentheorie« II. sv. str. 119 nachází se odvození rovnic differenciálních pro případ binárních forem, které jest v některých částech podobno odvození tu podanému.

na několika řadách, jest ovšem se zřetelem k proměnným každé jednotlivé řady homogenní.

Pro polární operace dle proměnných řad (ξ) zavedu toto označení:

$$\Delta_{ik} F = \frac{\partial F}{\partial \xi_1^{(i)}} \xi_1^{(k)} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2^{(i)}} \xi_2^{(k)} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \xi_n^{(i)}} \xi_n^{(k)}.$$

Pak můžeme vysloviti větu:

Závisí-li forma $F(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)})$ *na řadách* ($\xi^{(1)}$), ($\xi^{(2)}$), ... ($\xi^{(n)}$), *jsouc v řadě* ($\xi^{(k)}$) *stupně* p_k, *a jsou-li splněny rovnice*

$$\Delta_{12} F = 0, \quad \Delta_{13} F = 0, \ldots \Delta_{1n} F = 0, \tag{1}$$

jest forma F *dělitelna* p_1*-tou mocninou determinantu*

$$\delta = \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)}, & \xi_2^{(1)}, & \ldots & \xi_n^{(1)} \\ \xi_1^{(2)}, & \xi_2^{(2)}, & \ldots & \xi_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{(n)}, & \xi_2^{(n)}, & \ldots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}; \tag{2}$$

t. j. *lze psáti*

$$F(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)}) = \delta^{p_1} G(\xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \ldots \xi^{(n)}),$$

kde G *jest forma proměnných řad* $\xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)}$.

Neboť z věty Eulerovy o homogenních funkcích vyplývá

$$\Delta_{11} F = \frac{\partial F}{\partial \xi_1^{(1)}} \xi_1^{(1)} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2^{(1)}} \xi_2^{(1)} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \xi_n^{(1)}} \xi_n^{(1)} = p_1 F;$$

připíšeme pak k této rovnici (n — 1) rovnic (1) a máme v celku n rovnic

$$\Delta_{11} F = p_1 F, \quad \Delta_{12} F = 0, \quad \Delta_{13} F = 0, \ldots \Delta_{1n} F = 0.$$

Označme δ_{ik} minor příslušný ku prvku v i-tém řádku a k-tém sloupci v determinantu δ a násobme n rovnic právě napsaných po řadě čísly $\delta_{11}, \delta_{21}, \delta_{31}, \ldots \delta_{n1}$ a součiny sčítejme. Dostáváme

$$\delta \cdot \frac{\partial F}{\partial \xi_1^{(1)}} = p_1 \delta_{11} F. \tag{3}$$

Z tohoto výsledku se zřetelem k irreducibilitě determinantu δ následuje při $p_1 > 0$, že F jest dělitelno determinantem δ. Budiž dělitelno q-tou mocninou determinantu δ; t. j. předpokládejme vztah

$$F = \delta^q \,.\, G,$$

kde G již není dělitelno δ. Dosazením tohoto výrazu do (3) máme

$$\delta^{q+1}\frac{\partial G}{\partial \xi_1^{(1)}} = (p_1 - q)\,\delta_{11}\delta^q G,$$

z čehož vyplývá (dle předpokladu, že G není dělitelno δ), že $q = p_1$, čímž věta jest dokázána.

Jako důsledek její uvádím následující výrok. *Jestliže forma F jest v řadách* $(\xi^{(1)})$, $(\xi^{(2)})$, . . . $(\xi^{(n)})$ *stupňů, resp.* $p_1, p_2, \ldots p_n$, *jsou-li splněny rovnice* (1) *a jestliže stupeň p_1 jest vyšší nežli jeden ze stupňů* $p_2, p_3, \ldots p_n$, *jest forma F identicky rovna nulle.*

Pro operace polární platí, jak známo, tyto relace, (jež ostatně čtenář snadno si dokáže)

$$\begin{aligned} \Delta_{12}\Delta_{34} - \Delta_{34}\Delta_{12} &= 0, \\ \Delta_{12}\Delta_{13} - \Delta_{13}\Delta_{12} &= 0, \\ \Delta_{21}\Delta_{31} - \Delta_{31}\Delta_{21} &= 0; \\ \Delta_{12}\Delta_{31} - \Delta_{31}\Delta_{12} &= \Delta_{32}, \\ \Delta_{12}\Delta_{21} - \Delta_{21}\Delta_{12} &= \Delta_{22} - \Delta_{11}. \end{aligned} \tag{4}$$

II.

Proměnné (ξ) zavedené v odstavci předcházejícím budou pro nás proměnné pomocné. Vlastní proměnné základních forem označovati budeme pomocí písmen (x), (y), (z), . . . ; t. j. značiti bude (x) řadu n-ární obsahující proměnné $x_1, x_2, \ldots x_n$, atd. Výrazy pak

$$F(a, x, y, \ldots),\ G(b, x, y, \ldots),$$

značiti budou formy závislé na proměnných řadách (x), (y), . . . Písmena a, b, . . . udávají summárně koefficienty těch forem. Bude-li třeba vyznačiti jednotlivý koefficient, užijeme pro označení koefficientu při součinu

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}\,y_1^{\mu_1}y_2^{\mu_2}\ldots y_n^{\mu_n}\ldots$$

ve formě $F(a, x, y, \ldots)$ tohoto vyjádření

$$\frac{\lambda!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!}\cdot\frac{\mu!}{\mu_1!\,\mu_2!\ldots\mu_n!}\cdots\begin{bmatrix}\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \\ \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n \\ \ldots\ldots\ldots\end{bmatrix}_a;$$

při tom jsou $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n$, $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_n, \ldots$ stupně formy $F(a, x, y, \ldots)$ v řadách (x), (y) . . . Numerické faktory (podíly faktoriel) dávají se při koefficientech z důvodů obecně známých z nauky o formách binárních; koefficienty jsou vlastně stanoveny čísly, jež jsou přiřaděny symbolům

$$\begin{bmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \\ \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}_a,$$

i budeme již těmto číslům stručně říkati *koefficienty formy* $F(a, x, y \ldots)$.

Lineární substituci na proměnných (x) pišme ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1^{(1)} x'_1 + \xi_1^{(2)} x'_2 + \ldots + \xi_1^{(n)} x'_n, \\ x_2 &= \xi_2^{(1)} x'_1 + \xi_2^{(2)} x'_2 + \ldots + \xi_2^{(n)} x'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \xi_n^{(1)} x'_1 + \xi_n^{(2)} x'_2 + \ldots + \xi_n^{(n)} x'_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Jsou tedy pro nás proměnné (ξ) koefficienty lineárné substituce. Determinant této substituce δ není identicky rovný nulle. Užijeme-li označení odstavce předcházejícího, můžeme nové proměnné (x') vyjádřiti pomocí původních (x) takto:

$$\begin{aligned} \delta \,.\, x'_1 &= \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \ldots + \delta_{1n} x_n, \\ \delta \,.\, x'_2 &= \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \ldots + \delta_{2n} x_n. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Proměnné (y), (z) ... nechť transformují se touž substitucí lineární jako (x) ve (5) v proměnné nové (y'), (z') ...; t. j. proměnné (x), (y), (z) ... jsou kogredientní. Provedeme-li substituci (5) na (x), (y), (z) ... ve $F(a, x, y, \ldots)$, změní se tato forma ve formu $F(a', x', y', \ldots)$ týchž stupňů v řadách proměnných (x'), (y'), ... jako původní byla v řadách (x), (y), ...

Koefficienty a' transformované formy jsou racionálné celistvé homogenní funkce v (ξ) téhož celkového stupně a lineárné celistvé v koefficientech a; jakž patrno z identity definující formu transformovanou

$$F(a', x', y', \ldots) = F(a, x, y, \ldots) \tag{7}$$

a rovnic (5).

Můžeme přistoupiti nyní k definici invariantního útvaru příslušícího ku formě $F(a, x, y, \ldots)$. Budiž $I(A, x, y, \ldots)$ takovýto útvar; pak jsou A racionálné celistvé funkce koefficientů a a útvar ten hoví identicky rovnici

$$I(A', x', y', \ldots) = \delta^w\, I(A, x, y, \ldots). \tag{8}$$

Při tom jest A' výraz, který dostaneme z A, píšeme-li místo a příslušné koefficienty transformované formy a'. (Lze, jak známo, definici tuto trochu obecněji podati, ale o tom nechci se tu šířiti.) Při tom sluje w váha invariantního útvaru $I(A, x, y, \ldots)$. Pojem váhy lze ještě dále rozšířiti. Přikládáme určitou váhu též dle jednotlivých indexů i koefficientům formy i proměnným, a to takto: nazýváme váhou dle indexu 1 při proměnné x_k stupeň celkový, v jakém se vyskytuje řada $(\xi^{(1)})$ ve výrazu pro x'_k. Jak z (6) patrno, jest x'_k v $(\xi^{(1)})$ stupně -1, jestliže $k = 1$; stupně pak nulltého, není-li $k = 1$. I jest váha x_k dle indexu 1 rovna -1 pro $k = 1$,
rovna 0 pro $k \neq 1$.

Podobně stanovíme, že váha dle indexu 1 při koefficientu a jest rovna stupni, v jakém se vyskytuje řada $(\xi^{(1)})$ ve výrazu pro a'.

Z rovnice identické (7) pak plyne snadnou úvahou, že koefficient

$$\begin{bmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \\ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \\ \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}_a \tag{9}$$

má dle indexu k-tého váhu

$$\lambda_k + \mu_k + \ldots \tag{10}$$

Podobně vyplývá z (8), že váha koefficientu formy $I(A, x, y, \ldots)$

$$\begin{bmatrix} L_1, L_2, \ldots L_n \\ M_1, M_2, \ldots M_n \\ \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}_A \tag{11}$$

dle indexu k jest

$$w + L_k + M_k + \ldots \tag{12}$$

Tuto váhu mohli bychom též určiti z výrazu koefficientu A pomocí a. Neboť váha součinu dle indexu k rovná se součtu vah dle indexu k jednotlivých činitelů, jak z definice váhy dle k-tého indexu ihned vyplývá. I vidíme z toho, že A jest racionálnou celistvou funkcí stejnovážnou (isobarickou) dle indexu k koefficientů a; i jest váha koefficientu (11) dána výrazem (12), počítáme-li váhu koefficientu a v (9) dle výrazu (10).

Z okolnosti, že koefficienty a' jsou racionálné celistvé homogenní funkce téhož celkového stupně proměnných (ξ) a z identity definující (8), výplývá snadno dále, že Δ jsou homogenní dle koefficientů a a všecky A jednoho invariantního útvaru jsou téhož stupně v a. Předpokládáme při tom ovšem, že $I(a, x, y, \ldots)$ jest ve všech svých členech veskrze téhož stupně dle proměnných jednotlivých řad.

III.

Z věty pomocné odst. I. a z rovnice definující invariantní útvar (8) máme téměř bezprostředně větu:

Forma $I(A, x, y, \ldots)$ homogenní racionálná celistvá funkce koefficientů formy $F(a, x, y, \ldots)$ a dle každého indexu téže váhy, jest invariantním útvarem formy F tenkrát a jenom tenkrát, když splněny jsou podmínky

$$\Delta_{1k}\, I(A', x', y', \ldots) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots n. \tag{13}$$

Nejsou sice (x') celistvé v proměnných (ξ); jmenovatel však ve výrazu pro (x') se vyskytující jest δ, a mohli bychom násobením vhodnou mocninou δ levou stranu rovnice (8) učiniti celistvou v (ξ). Od toho však upustíme, neboť δ se vzhledem k operacím Δ_{ik} jako konstanta chová a nepůsobí nám mocnina δ v jmenovateli žádných obtíží.

Že podmínky (13) jsou nutné, to vyplývá právě z definice (8), že jsou postačující z pomocné věty odst. I.

Operace Δ_{1k} můžeme prováděti dle tohoto vzoru

$$\Delta_{12}\, I = \sum_{a'} \frac{\partial I}{\partial a'}\, \Delta_{12} a' + \sum_{x'} \frac{\partial I}{\partial x'}\, \Delta_{12} x' + \sum_{y'} \frac{\partial I}{\partial y'}\, \Delta_{12} y' + \ldots$$

Znaménko první součtové vztahuje se na všecky koefficienty a' formy $F(a', x', y', \ldots)$, druhé na všecky proměnné $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ řady x', a t. d.

Výrazy $\Delta_{12}\, x'$ snadno vyjádříme z rovnic (6) pomoci (x'); jest

$$\Delta_{12}\, x'_1 = 0, \qquad \Delta_{12}\, x'_2 = -\, x'_1, \qquad \Delta_{13}\, x'_3 = 0, \ldots \tag{14}$$

a obecně

$$\Delta_{ik}\, x'_l = 0, \qquad \text{pro } k \neq l; \qquad \Delta_{ik}\, x'_k = -\, x'_i. \tag{15}$$

Stejně tvořené vztahy platí ovšem i pro ostatní proměnné (y'), . . ., jež jsou dle předpokladu kogredientní.

Avšak i výrazy $\Delta_{ik}\, a'$ lze vyjádřiti pomocí a'. Stačí při tom vycházeti z rovnice stanovící a' (7). Z této následuje

$$\Delta_{12}\; F(a', x', y', \ldots) = 0.$$

Máme-li na zřeteli (15), dostáváme, položíme-li v této rovnici koefficienty různých produktů proměnných rovny nulle,

$$\begin{aligned}\Delta_{12}\begin{bmatrix}\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\\ \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n\\ \ldots\ldots\ldots\end{bmatrix}_{a'} &= \lambda_1 \begin{bmatrix}\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1, \ldots \lambda_n\\ \mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots \mu_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{bmatrix}_{a'}\\ &+ \mu_1 \begin{bmatrix}\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots \lambda_n\\ \mu_1 - 1, \mu_2 + 1, \ldots \mu_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{bmatrix}_{a'} + \ldots\end{aligned} \tag{16}$$

a obecně (i i k se předpokládá v násl. formuli různé od 1, 2, n)

$$\begin{aligned}&\Delta_{ik}\begin{bmatrix}\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i, \ldots \lambda_k, \ldots \lambda_n\\ \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_i, \ldots \mu_k, \ldots \mu_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{bmatrix}_{a'}\\ &= \lambda_i \begin{bmatrix}\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i - 1, \ldots \lambda_k + 1, \ldots \lambda_n\\ \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_i, \quad \ldots \mu_k, \quad \ldots \mu_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{bmatrix}_{a'}\\ &+ \mu_i \begin{bmatrix}\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i, \quad \ldots \lambda_k, \quad \ldots \lambda_n\\ \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_i - 1, \ldots \mu_k + 1, \ldots \mu_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{bmatrix}_{a'} + \ldots\end{aligned} \tag{17}$$

Jest tedy jasno, že výrazy $\Delta_{12} I, \ldots$ jsou opět racion. cel. funkce a', (x'), (y'), ... a jsou to výrazy, jež mají identicky vymizeti (pro jakékoliv ξ) I tvrdím, že to nastane pro všecka ξ, nastane-li to pro hodnoty ξ takto stanovené

$$\xi_{ik} = 0, \quad \text{pro } i \neq k; \quad \xi_{ii} = 1.$$

Neboť při těchto hodnotách mění se (x') v (x), (y') v (y) a a' v příslušné a. Vymizí-li identicky výraz v a, (x), (y) . . ., vymizí ovšem identicky výraz, který dostaneme záměnou a' za a, (x') za (x), . . . (ať jest (ξ) jakékoliv). *Můžeme tudíž operacím Δ_{ik} dáti význam nezávislý na (ξ) a také budeme v následujícím jenom takový význam přikládati* (rovnicemi (20) a (21)). Větě v čele tohoto odstavce vyslovené můžeme pak dáti tento tvar.

Aby forma I $(A, x, y, \ldots)$, homogenní a racionální celistvá funkce koefficientů formy $F(a, x, y, \ldots)$ a dle každého *indexu téže váhy byla invariantním útvarem formy $F(a, x, y \ldots)$, k tomu nutné a postačující podmínky jsou dány rovnicemi*

$$\Delta_{1k} I(A, x, y, \ldots) = 0, \quad k = 2, 3, \ldots n. \tag{18}$$

Při tom jsou operace Δ_{ik} definovány takto

$$\Delta_{12} I = \sum_a \frac{\partial I}{\partial a} \Delta_{12} a + \sum_{(x)} \frac{\partial I}{\partial x} \Delta_{12} x + \ldots \tag{19}$$

$$\Delta_{12} x_k = 0 \quad \text{pro } k \neq 2, \quad \Delta_{12} x_2 = - x_1, \tag{20}$$

$$\Delta_{12} \begin{bmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \\ \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n \\ \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}_a = \lambda_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1, \ldots \lambda_n \\ \mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots \mu_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}_a$$
$$+ \mu_1 \begin{bmatrix} \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots \lambda_n \\ \mu_1 - 1, \mu_2 + 1, \ldots \mu_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}_a + \ldots \tag{21}$$

Jest jasno dle (8), že invariantní útvar $I(A, x, y, \ldots)$ vyhovuje i ostatním rovnicím $\Delta_{ik} I = 0$ pro i různé od 1 a od k. Ale tyto lze tu pokládati za důsledek rovnic (18). Rovněž jest patrno, že pro koefficienty formy invariantní $I(A, x, y, \ldots)$ platí zcela stejné vztahy vzhledem k operacím Δ jako pro koefficienty formy původní, z nichž jeden jest napsán ve (21). Jest právě tak

$$\Delta_{ik} \begin{bmatrix} L_1, L_2, \ldots L_n \\ M_1, M_2, \ldots M_n \\ \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}_A = L_i \begin{bmatrix} \ldots, L_i - 1, \ldots L_k + 1, \ldots \\ \ldots, M_i, \quad \ldots, M_k, \quad \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}_A$$
$$+ M_i \begin{bmatrix} \ldots, L_i, \quad \ldots, L_k, \quad \ldots \\ \ldots, M_i - 1, \ldots, M_k + 1, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}_A + \ldots \tag{22}$$

v označení snadno srozumitelném.

Netřeba snad ani podotýkati, že tatáž věta jako právě dokázaná platí i pro invariantní útvary systému forem ku př.

$$F(a, x, y, \ldots), \; G(b, x, y, \ldots), \; H(c, x, y, \ldots), \ldots$$

jakož bezprostředně jasno. Význam operací Δ_{ik} jest tu dán místo (19) rovnicí touto

$$\Delta_{12} I = \sum_a \frac{\partial I}{\partial a} \Delta_{12} a + \sum_b \frac{\partial I}{\partial b} \Delta_{12} b + \sum_c \frac{\partial I}{\partial c} \Delta_{12} c + \ldots$$
$$+ \sum_{(x)} \frac{\partial I}{\partial x} \Delta_{12} x + \ldots$$

IV.

Při formách binárních dají se všecky invariantní útvary vyjádřiti pomocí polárních forem o jedné řadě proměnných, jakož vyplývá z rozvoje Clebsch-Gordanova. Zcela podobně lze dokázati pomocí rozvojů obecnějších*), že všecky invariantní útvary forem n-árních lze vyjádřiti pomocí polár forem o $(n - 1)$-řadách proměnných.

Budeme tedy při dané formě (resp. syst. forem) bráti v úvahy invariantní útvary toliko o $(n - 1)$ řadách proměnných. Aby pak výklady následující získaly na přehlednosti, budeme předpokládati, že běží o formy kvaternární $(n = 4)$; dostaneme při tom výrazy nejenom přehlednější, nýbrž i vyhneme se tím některým obtížím při označování.

Budiž tedy takový invariantní útvar o třech řadách kvaternárních proměnných

$$I(A, x, y, z)$$

patřící ku formě anebo systému forem kvaternárních. Stupně dle řad proměnných (x), (y), (z) buďtež l, m, n; váha pak w. Jednotliví členové toho výrazu mají tudíž tento tvar

$$\frac{l!}{l_1!\,l_2!\,l_3!\,l_4!}\,\frac{m!}{m_1!\,m_2!\,m_4!\,m_4!}\,\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,n_4!}\begin{bmatrix} l_1, & l_2, & l_3, & l_4 \\ m_1, & m_2, & m_3, & m_4 \\ n_1, & n_2, & n_3, & n_4 \end{bmatrix}_A \cdot$$

$$. \, x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3} x_4^{l_4}\, y_1^{m_1} y_2^{m_2} y_3^{m_3} y_4^{m_4}\, z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3} z_4^{n_4}$$

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = l, \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = m,$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n.$$

Pro nás jest nejdůležitější koefficient součinů tvaru jako $x_2^l y_3^m z_4^n$. Zavedeme pro koefficient tohoto právě součinu označení písmenou S kladouce

$$S = \begin{bmatrix} o, & l, & o, & o \\ o, & o, & m, & o \\ o, & o, & o, & n \end{bmatrix}.$$

---

*) Capelli, Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques, Math. Annalen sv. 37., str. 1. Větu v odst. 1. přímo dokázanou lze pokládati za důsledek rozvoje Capelliova. Viz Capelli, l. c. str 34..

S jest dle indexů 1, 2, 3, 4 váhy w, $w+l$, $w+m$, $w+n$ a dle (22) jsou splněny tyto rovnice

$$\varDelta_{12} S = 0, \quad \varDelta_{13} S = 0, \quad \varDelta_{14} S = 0.^{*)} \tag{23}$$

Mimo to jest *výraz* S *jistě od nully rozdílný* (při numericky neurčených koefficientech daných forem a je-li $I(A, x, y, z)$ vůbec od nully různo, což obojí zde předpokládáme) *a lze pomocí operací* $\varDelta_{ik}$ *z* S *všecky ostatní koefficienty útvaru* I *odvoditi*. Že tomu tak jest, snadno postupně poznáme.

Tak nejprve operace $\varDelta_{21}^{l_1} \varDelta_{23}^{l_3} \varDelta_{24}^{l_4}$ dává

$$\varDelta_{21}^{l_1} \varDelta_{23}^{l_3} \varDelta_{24}^{l_4} S = \frac{l!}{l_2!} \begin{bmatrix} l_1, & l_2, & l_3, & l_4 \\ 0, & 0, & m, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & n \end{bmatrix}_A . \tag{24}$$

Provedeme-li na koefficient, k němuž jsme došli, operaci $\varDelta_{31}^{m_1} \varDelta_{32}^{m_2} \varDelta_{34}^{m_4}$, dostaneme

$$\varDelta_{31}^{m_1} \varDelta_{32}^{m_2} \varDelta_{34}^{m_4} \varDelta_{21}^{l_1} \varDelta_{23}^{l_3} \varDelta_{24}^{l_4} S = \frac{l!}{l_2!} \cdot \frac{m!}{m_3!} \begin{bmatrix} l_1, & l_2, & l_3, & l_4 \\ m_1, & m_2, & m_3, & m_4 \\ 0, & 0, & 0, & n \end{bmatrix}_A + \Sigma, \tag{25}$$

kde Σ jest součet jistých výrazů

$$\begin{bmatrix} l_1, & l_2, & l_3, & l_4 \\ m'_1, & m'_2, & m'_3, & m'_4 \\ 0, & 0, & 0, & n \end{bmatrix}_A$$

uásobených numerickými koefficienty a ve kterých $m'_1 + m'_2 + m'_4$ jest menší nežli $m_1 + m_2 + m_4$. Známe-li tudíž tyto výrazy, vypočteme z (25)

$$\begin{bmatrix} l_1, & l_2, & l_3, & l_4 \\ m_1, & m_2, & m_3, & m_4 \\ 0, & 0, & 0, & n \end{bmatrix}_A \tag{26}$$

Poněvadž však dle (24) známe výrazy, v nichž $m_1 + m_2 + m_4 = 0$, vypočteme tak výrazy v nichž $m_1 + m_2 + m_4 = 1$, pak výrazy, v nichž $m_1 + m_2 + m_4 = 2$, a t. d.

---

*) Tyto rovnice jsou splněny pro každý koefficient váhy w dle indexu 1. Neboť operacemi $\varDelta_{1k}$ ($k \pm 1$) se váha dle ind. 1 o jednu zmenšuje, v invariantním útvaru však o váze w nemohou býti (dle definice vah) váhy koefficientů dle jednotlivých indexů menší nežli w.

Konečně z vyjádření

$$\Delta_{41}^{n_1}\Delta_{42}^{n_2}\Delta_{43}^{n_3}\Delta_{31}^{m_1}\Delta_{32}^{m_2}\Delta_{34}^{m_4}\Delta_{21}^{l_1}\Delta_{23}^{l_3}\Delta_{24}^{l_4}\, S$$

pomocí koefficientů útvaru I dostáváme rekurentní rovnice stanovící všecky

$$\begin{bmatrix} l_1, & l_2, & l_3, & l_4 \\ m_1, & m_2, & m_3, & m_4 \\ n_1, & n_2, & n_3, & n_4 \end{bmatrix}_A \qquad (27)$$

dosud neurčené. Tím tvrzení učiněné dokázáno.

Mají ovšem i jiné koefficienty právě takové vlastnosti, jako právě byly dokázány o S; (že jsou jistě od nully různy a že lze z nich pomocí operací Δ_{ik} všecky ostatní koefficienty odvoditi); tak ku př.

$$T = \begin{bmatrix} l, & o, & o, & o \\ o, & o, & o, & m \\ o, & n, & o, & o \end{bmatrix}$$

a vůbec koefficienty součinů $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots z_4^{n_4}$, kde z každé řady proměnných, na nichž invariantní útvar závisí, jen jediná proměnná se vyskýtá. Koefficientům takových součinů říkati budeme *vedoucí součinitelé invariantního útvaru.*

Vytkl jsem již, že S hoví rovnicím (23). Výrazy, pro něž tyto rovnice jsou splněny, nazývati budeme *semiinvarianty* dle indexu 1 (anebo prostě semiinvarianty, T jest semiinvariant dle indexu 3). I vidíme, že platí nejprve, že vedoucí koefficicienty jsou semiinvarianty (dle toho nebo těch indexů, jež chybí v příslušném vedoucím členu při součinu proměnných).

Avšak platí také opak. *Každý semiinvariant lze pokládati za vedoucí koefficient invariantního útvaru.* I jest tímto koefficientem invariantní útvar jednoznačně určen (nehledě ovšem k různému označení proměnných řad).

Abychom to dokázali, budiž S semiinvariantem příslušným ku kvaternární formě (anebo ku systému kvaternárních forem), jenž hoví rovnicím $\Delta_{12} S = 0$, $\Delta_{13} S = 0$, $\Delta_{14} S = 0$. Váhy jeho vzhledem k indexům buďtež w_1, w_2, w_3, w_4. Tu nejprve (dle důsledku věty pomocné z odst. I.) $w_1 \leqq w_2$, $w_1 \leqq w_3$, $w_1 \leqq w_4$; *nejsou-li tyto vztahy pro váhy splněny, jest semiinvariant identicky rovný nulle.* Jestliže $w_1 = w_2 = w_3 = w_4$, jest S dle věty odst. III. invariantním útvarem nezávislým na proměnných (invariantem v užším slova smyslu) a další vyšetřování odpadá. Můžeme tudíž předpokládati, že nejsou všecky w_i sobě rovny a že jest w_1 nejmenší anebo aspoň jednou z nejmenších vah. Zavedeme pro w_i tato označení: $w_1 = w$, $w_2 = w + l$, $w_3 = w + m$, $w_4 = w + n$, kde čísla l, m, n jsou positivná, po případě z části nulle rovná celá čísla. Položíme

$$S = \begin{bmatrix} o, & l, & o, & o \\ o, & o, & m, & o \\ o, & o, & o, & n \end{bmatrix}_A$$

a definujíce výsledek (záměnných) operací Δ_{21}, Δ_{23}, Δ_{24} použitých na S ve shodě s rovnicí (24), obdržíme výrazy

$$\begin{bmatrix} l_1, & l_2, & l_3, & l_4 \\ o, & o, & m, & o \\ o, & o, & o, & n \end{bmatrix}_A . \qquad (24')$$

Definujíce výsledek (záměnných) operací Δ_{31}, Δ_{32}, Δ_{34} na tyto výrazy použitých opět ve shodě s výsledky těch operací užitých na koefficienty formy resp. útvarů invariantních, dostáváme dle rovnice (25) řadu dalších výrazů tvaru (26). Definujíce konečně rovněž ve shodě s dřívějším, výsledek (záměnných) operací Δ_{41}, Δ_{42}, Δ_{43} na výrazech tak obdržených, dostaneme výrazy tvaru (27). Pokládajíce výrazy (24'), (26), (27) za koefficienty jisté formy K (ve shodě s označením svrchu popsaným), můžeme tvrditi, že forma K jest invariantním útvarem základní formy (resp. syst. forem). Abychom to dokázali, stačí jenom dle věty odst. III. dokázati, že forma K hoví rovnicím $\Delta_{12} K = 0$, $\Delta_{13} K = 0$, $\Delta_{14} K = 0$; a k tomu zase postačí dokázati, že pro koefficienty formy K splněny jsou relace tvaru (22) vzhledem k operacím Δ_{12}, Δ_{13}, Δ_{14}. *Dokážeme, že tyto relace splněny jsou vzhledem ku všem operacím Δ_{ik}.*

Vezměme v úvahu ku př. výrazy

$$\begin{bmatrix} l_1, & l_2, & l_3, & l_4 \\ m_1, & m_2, & m_3, & m_4 \\ n_1, & n_2, & n_3, & n_4 \end{bmatrix}_A, \quad \text{kde } n_1 + n_2 + n_3 = \nu, \qquad (28)$$

a proveďme při nich důkaz úplnou indukcí. Pro operace Δ_{41}, Δ_{42}, Δ_{43} při těchto výrazech důkaz prováděti netřeba, neboť pro tyto operace jsou splněny relace tvaru (22) dle definice výrazů (28); (stačí uvážiti, že operace Δ_{41}, Δ_{42}, Δ_{43} jsou záměnné).

Předpokládejme, že věta jest dokázána pro všecky výrazy (28), při nichž $n_1 + n_2 + n_3 = \nu \geqq 0$, $\nu < n$, dokážeme ji pro výrazy, při nichž $n_1 + n_2 + n_3 = \nu + 1$. Od výrazu (28) přejdeme (dle definice) k výrazům, jichž ν jest o jednu vyšší, užijeme-li naň operace Δ_{4k} ($k = 1, 2, 3$). I jest

$$\Delta_{41}\begin{bmatrix} l_1, & l_2, & l_3, & l_4 \\ m_1, & m_2, & m_3, & m_4 \\ n_1, & n_2, & n_3, & n_4 \end{bmatrix}_A = l_4\,[l_1 + 1,\ l_4 - 1]_A$$

$$+ m_4\,[m_1 + 1,\ m_4 - 1]_A + n_4\,[n_1 + 1,\ n_4 - 1]_A;$$

(při tom jsem na pravé straně vypisoval jenom ty indexy v označení koefficientů, jež se změnily). Rovnice právě napsaná definuje $\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_1 + 1, & n_2, & n_3, & n_4 - 1 \end{bmatrix}_A$, jak svrchu vytčeno.

Provedeme-li na obou stranách vztahu operaci Δ_{ik}, užijeme-li na levé straně rovnic (4) a provedeme-li operace Δ_{ik} na všecky výrazy (28), při nichž $n_1 + n_2 + n_3 = \nu$, dle formule (22) v tomto případě dle supposice platné, dostaneme snadným počtem

$$\Delta_{ik}\begin{bmatrix} l_1, & l_2, & l_3, & l_4 \\ m_1, & m_2, & m_3, & m_4 \\ n_1 + 1, & n_2, & n_3, & n_4 - 1 \end{bmatrix}; \tag{30}$$

tedy výsledek operace Δ_{ik} na výraze, v němž ν jest o jednu větší. Provedení příslušných výkonů pro jednotlivé operace Δ_{ik} přenechávám čtenáři. Snadno dostaneme, že výsledek pro (30) bude se shodovati s relací (22)*).

Tak proveden důkaz, při všech výrazech (28), u nichž $\nu > 0$, předpokládá-li se správnost tvrzení pro $\nu = 0$. Na druhém

---

*) Vskutku však netřeba tento výpočet prováděti, neboť předem jasno, že výsledek shodovati se musí s rovnicí (22), jelikož rovnice, jimiž jednotlivé koefficienty jsou stanoveny, rovněž s (22) se shodují. Jinak by mezi koefficienty každého invariantního útvaru, jehož stupně v proměnných (x), (y), (z) jsou l, m, n musily existovati vždy tytéž lineárné vztahy, což jest nemožno; lze totiž snadno udati invariantní útvary těch stupňů, jichž koefficienty jsou lineárně nezávisly. Ku př. ku systému forem $F(a, x)$, $G(b, y)$, $H(c, z)$ stupňů v proměnných, resp. l, m, n přísluší invariantní útvar $F(a, x) \cdot G(b, y) \cdot H(c, z)$, který při libovolných a, b, c má tu vlastnost

místě provedeme důkaz při výrazech

$$\begin{bmatrix} l_1, & l_2, & l_3, & l_4 \\ m_1, & m_2, & m_3, & m_4 \\ o, & o, & o, & n \end{bmatrix}_A, \quad m_1 + m_2 + m_4 = \mu,$$

při nichž $\mu > 0$, předpokládá-li se tvrzení při těch výrazech, u nichž $\mu = 0$; a t. d., až převedeme celý důkaz na tvrzení, že operace Δ_{ik} dávají při

$$\begin{bmatrix} o, & l, & o, & o \\ o, & o, & m, & o \\ o, & o, & o, & n \end{bmatrix}_A$$

výsledky stanovené (22). Ale to netřeba dokazovati, neboť pro operace Δ_{12}, Δ_{13}, Δ_{14} jest to předpokládáno; pro ostatní operace Δ_{ik} jest to splněno dle definice.

Podobné methody, jaká právě při důkaze užita, užívá se při důkazu analogické věty v binárních formách a při n-árních formách pak zejména k důkazu, že každá homogenní isobarická (dle každého indexu) funkce koefficientů jest vedoucím členem invariantního útvaru o n řadách proměnných, kterýmžto členem útvar jest jednoznačně určen.

Avšak větu, že každý semiinvariant jest vedoucím členem invariantního útvaru (jakož i věty obdobné, jako ku př. jest věta právě zmíněná o inv. útvarech o n řadách proměnných), lze ještě jinak — mnohem jednodušeji — dokázati; ukáže se při tom opět užitek pomocné věty odst. I.

Abychom způsob důkazu objasnili, zvolme si semiinvariant S n-ární formy (resp. syst. forem) a hovící tedy rovnicím

$$\Delta_{1k} S = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots n; \tag{1'}$$

váhy S dle indexů 1, 2, 3, ... n buďtež w, $w + r_2$, $w + r_3$, ... $w + r_n$.

Nahraďme v semiinvariantu koefficienty a základní formy příslušnými koefficienty a' formy transformované lineárnou transformací (5). Tak změní se S v S', jež záviseti bude jednak na koefficientech a, jednak na proměnných (ξ). Vyhovuje pak S' rovnicím (1'), *přikládáme-li operacím Δ_{ik} jich původní význam operací polárních dle* (ξ), a můžeme tudíž psáti

$$S' = \delta^w . S_1, \tag{31}$$

kde S_1 jest forma závislá na $n - 1$ řadách $(\xi^2), \ldots (\xi^{(n)})$ a jest to invariantní útvar v těchto řadách stupňů $r_2, \ldots r_n$, jehožto vedoucí koefficient jest S.

Neboť S' jest invariantní útvar, jelikož jest to racionálná celistvá funkce koefficientů a' a každé a' jest forma proměnných (ξ) vzniklá z původní polarisováním; i jest každé a' invariantním útvarem váhy nullté *). Rovněž δ jest invariantním útvarem a to váhy -1; neboť provedeme-li na (ξ) lineární substituci o determinantu d a přeměňující (ξ) v (ξ') jest mezi δ a transformovaným výrazem příslušným δ' relace $\delta' = d^{-1}\delta$. I jest S_1 invariantní útvar váhy w.

Vedoucí člen útvaru S_1 dostaneme, klademe-li $\xi_{ii} = 1$, $\xi_{ik} = 0$ při $i \neq k$. Tu se však δ redukuje na 1. a' se mění v a a tudíž dle (31) z S_1 dostáváme S. I jest vedoucí člen invariantního útvaru S_1 vskutku S, jak bylo dokázati.

Zcela podobně dostáváme větu — svrchu již dokázanou — že semiinvariant jakožto vedoucí člen určuje příslušný invariantní útvar jednoznačně. Budiž za tím účelem $I(A, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n-1)})$ invariantní útvar n-ární formy a semiinvariant S součinitel výrazu $x_2^{(1)r_2} . x_3^{(2)r_3} \ldots x_n^{(n-1)r_n}$. Transformujme proměnné $(x^{(1)}), \ldots (x^{(n-1)})$ substitucí (5) i máme vztah

$$I(A', x'^{(1)}, x'^{(2)}, \ldots x'^{(n-1)}) = \delta^w \, I(A, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n-1)}).$$

Položme v tomto výraze za

$$\begin{array}{llr}
x'^{(1)}_1, x'^{(1)}_2, x'^{(1)}_3, \ldots x'^{(1)}_n & \text{hodnoty} & 0, 1, 0, 0, \ldots 0, \\
x'^{(2)}_1, x'^{(2)}_2, x'^{(2)}_3, \ldots x'^{(2)}_n & & 0, 0, 1, 0, \ldots 0, \\
x'^{(3)}_1, x'^{(3)}_2, x'^{(3)}_3, \ldots x'^{(3)}_n & & 0, 0, 0, 1, \ldots 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots ;
\end{array}$$

tím dle (5) $(x^{(1)})$ změní se ve $(\xi^{(2)})$, (x^2) ve $(\xi^{(3)}), \ldots$ a my dostáváme ze (32)

$$S' = \delta^w . I(A, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \ldots \xi^{(n)}),$$

odkudž uvedené tvrzení opětně vyplývá.

---

*) Přímý důkaz, že a' jakožto forma proměnných (ξ) jest invariantní útvarem příslušným ku dané formě, jest též bez jakékoliv potíže.