Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Papřok

Aplikace Kummerovy transformace na řadu geometrickou

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 3, 326--327

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122974

Aplikace Kummerovy transformace na řadu geometrickou.

Napsal **Jos. Pařok.**

Účinek Kummerovy transformace na nekonečnou, konvergentní řadu

$$R = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

jeví se přeměnou její v řadu

$$R = a_0 + \frac{1}{\lambda} a_0 P_0 - \frac{1}{\lambda} \lim_{n=\infty} a_n P_n + \sum_0^\infty \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right) a_{n+1},$$

kde $P_0, P_1, \ldots P_n, \ldots$ jsou čísla jinak libovolná, ale tak zvolená, aby řada $\sum\limits_0^\infty \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right) a_{n+1}$ byla konvergentní;

$$\lambda_n = P_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - P_{n+1},$$

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n = \lambda.$$

Řada po této transformaci, jak patrno, bude rychleji konvergovati než řada původní.

Jaká změna se stane s řadou geometrickou

$$1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots, \quad (q > 1)$$

provedeme-li na ní zmíněnou transformaci?

Volme

$$P_0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 1,$$

a bude

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = q - 1,$$

$$\lambda = \lim \lambda_n = q - 1,$$

takže řada

$$1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots = 1 + \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q-1} \lim \frac{1}{q^{n-1}}$$

$$= \frac{q}{q-1};$$

přeměnila se nám tedy přímo v součtový vzorec.

Provedeme-li celý Kummerův proces transformační, obdržíme tuto methodu k nalezení součtu nekonečné řady geometrické*)

Ze složení řady geometrické

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \ldots$$

jest patrno, že

$$a_{n-1} = q a_n,$$

tedy

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 &= (q - 1)\, a_1, \\ a_1 - a_2 &= (q - 1)\, a_2, \\ a_2 - a_3 &= (q - 1)\, a_3, \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

a ty sečtením dávají

$$a_0 = (q - 1)\,[a_1 + a_2 + a_3 + \ldots],$$

tedy

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = a_0 + \frac{a_0}{q-1} = \frac{q}{q-1}.$$

Beze změny lze methodu tuto aplikovati na řadu konečnou, takže sečtením $(n - 1)$ rovnic

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 &= (q - 1)\, a_1, \\ a_1 - a_2 &= (q - 1)\, a_2, \\ &\;\vdots \\ a_{n-2} - a_{n-1} &= (q - 1)\, a_{n-1} \end{aligned}$$

obdržíme součtový vzorec

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} = \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1}.$$

---

*) Pokud mi známo, nebylo této methody ještě použito, ač jest velmi jednoduchá.