Tu obdržíme větu: Je-li trojúhelník ABC kuželosečce o středu o opsán, pak sdružené průměry ku oA, oB, oC protínají libovolnou tečnu v bodech a, b, c, jichž spojnice s vrcholy A, B, C dávají tři přímky jdoucí týmž bodem.

Volíme-li za kuželosečku kružnici vepsanou v trojúhelník ABC, pak dospíváme k duálné větě k theoremu Simsonově:

Kolmice se středu o vepsané kružnice spuštěné na přímky oA, oB, oC protínají libovolnou tečnu kružnice v bodech a, b, c a tu platí: přímky Aa, Bb, Cc procházejí týmž bodem. Bod tento možno tedy za duálný bod ku přímce Simsonově pokládati.

Úvod do vektorové analyse.

Napsal řed. **Ant. Libický.**

(Pokračování.)

Rovnice (136) můžeme též různě transformovati; nejprve první z nich, totiž

$$div\ Pot\ \mathbf{v} = Max\ \mathbf{v},$$

vyměníme-li v ní $\mathbf{v}$ vektorem $\nabla_n v$. Tím nabudeme

$$div\ Pot\ \nabla_n v = Max\ \nabla_n v,$$

aneb, jelikož dle (54^b) a (53)

$$New\ v = \nabla_0\, Pot\ v = Pot\, \nabla_n\, v,$$

též

$$div\ New\ v = Max\ \nabla_n v, \tag{141}$$

kde za ∇_n můžeme opět psáti prostě ∇.

Z rovnice (136^a) plyne dále

$$\nabla\, Max\ \mathbf{v} = \nabla\, div\ Pot\ \mathbf{v} = \nabla\, Pot\ div\ \mathbf{v},$$

užijeme-li relace (131^b); ježto dle (54^b)

$$\nabla\, Pot\ div\ \mathbf{v} = New\ div\ \mathbf{v},$$

obdržíme

$$\nabla\, Max\ \mathbf{v} = New\ div\ \mathbf{v}. \tag{142}$$

Podobně v rovnici (136^b) položme $curl\ \mathbf{v}$ za $\mathbf{v}$; i bude

$$curl\ Pot\ curl\ \mathbf{v} = Lap\ curl\ \mathbf{v}.$$

Vzhledem k (132^b) lze psáti

$$curl\ Pot\ curl\ \mathbf{v} = curl\ curl\ Pot\ \mathbf{v} = curl^2\ Pot\ \mathbf{v};$$

zaveďme-li na pravé straně dle (136^b) opět $Lap\ \mathbf{v}$, nabudeme

$$Lap\ curl\ \mathbf{v} = curl\ Lap\ \mathbf{v}. \tag{143}$$

d) Konečně použijeme rovnice (111), totiž

$$curl^2\,\mathbf{v} = \nabla\,div\,\mathbf{v} - \nabla^2\mathbf{v},$$

z níž plyne

$$\nabla^2\mathbf{v} = \nabla\,div\,\mathbf{v} - curl^2\,\mathbf{v}.$$

Dosaďme v této rovnici *Pot* **v** za vektor **v**; tím obdržíme

$$\nabla^2 Pot\,\mathbf{v} = \nabla\,div\,Pot\,\mathbf{v} - curl^2\,Pot\,\mathbf{v}.$$

Členům na pravé straně dejme jiný tvar; především jest, jak v důkazu vzorce (142) bylo uvedeno,

$$\nabla\,div\,Pot\,\mathbf{v} = \nabla\,Pot\,div\,\mathbf{v} = New\,div\,\mathbf{v} = \nabla\,Max\,\mathbf{v}.$$

Pro výraz *curl*^{2} *Pot* **v** našli jsme odvozujíce rovnici (143)

$$curl^2\,Pot\,\mathbf{v} = Lap\,curl\,\mathbf{v} = curl\,Lap\,\mathbf{v}\,;$$

substitucí vychází buď

$$\nabla^2 Pot\,\mathbf{v} = New\,div\,\mathbf{v} - Lap\,curl\,\mathbf{v} \tag{144a}$$

aneb

$$\nabla^2 Pot\,\mathbf{v} = \nabla\,Max\,\mathbf{v} - curl\,Lap\,\mathbf{v}. \tag{144b}$$

Další důležitá vyšetřování, týkající se zejména *rozkládání daného pole vektorového ve dvě nebo tři jiná jednodušší,* provedeme, užijeme-li známé rovnice Laplace-Poissonovy, jejíž důkaz tuto opomíjíme *). Obyčejný tvar této rovnice jest

$$\frac{\partial^2 Pot\,v}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 Pot\,v}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 Pot\,v}{\partial z_0^2} = -4\pi v\,; \tag{145a}$$

kde *v* značí skalární funkci, jejíž potenciál *Pot v* jest v celém prostoru úkon určitý, konečný a nepřetržitý.

Používajíce označení vektorové analyse, můžeme tuto rovnici psáti kratčeji buď

$$\nabla^2\,Pot\,v = -4\pi v \tag{145b}$$

anebo vzhledem k druhému vzorci (107)

$$div\,\nabla\,Pot\,v = -4\pi v \tag{145c}$$

anebo dle (54^b)

$$div\,New\,v = -4\pi v \tag{145d}$$

nebo konečně dle (141)

$$Max\,\nabla\,v = -4\pi v. \tag{145e}$$

Rovnice Laplace-Poissonova platí též pro funkce vektorové, jichž potenciál má hodnotu určitou, konečnou a nepřetržitou.

---

*) Srovn. Dr. Aug. Seydler: Základové theoretické fysiky. Díl II., pag. 27—31.

Neboť rozložíme-li vektor $\mathbf{v}$ ve tři složky:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k},$$

můžeme psáti

$$div \nabla Pot\, v_x = -4\pi v_x,$$
$$div \nabla Pot\, v_y = -4\pi v_y,$$
$$div \nabla Pot\, v_z = -4\pi v_z,$$

tudíž

$$div \nabla Pot\, (v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) = -4\pi\, (v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k})$$

aneb

$$div \nabla Pot\, \mathbf{v} = -4\pi\mathbf{v}. \tag{146^a}$$

Ježto

$$div \nabla \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v},$$

jak lze rozložením vektoru $\mathbf{v}$ ve tři složky a použitím druhé rovnice (107) snadno dokázati, bude

$$\nabla^2 Pot\, \mathbf{v} = -4\pi\mathbf{v}. \tag{146^b}$$

Rovnici té lze dáti ještě jiný tvar, použijeme-li buď vzorce (144^a) neb (144^b); obdržíme pak

$$Lap\; curl\, \mathbf{v} - New\; div\, \mathbf{v} = 4\pi\mathbf{v} \tag{146^c}$$

aneb

$$curl\; Lap\, \mathbf{v} - \nabla Max\, \mathbf{v} = 4\pi\mathbf{v}. \tag{146^d}$$

Z předposlední rovnice plyne

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi}\, Lap\; curl\, \mathbf{v} - \frac{1}{4\pi}\, New\; div\, \mathbf{v}, \tag{146^e}$$

t. j. 4π-násobný vektor $\mathbf{v}$, jehož potenciál vyhovuje rovnici Poissonově, rovná se rozdílu Laplace-ova integrálu jeho curlu a Newtonova integrálu jeho divergence.

Píšeme-li kratčeji

$$\frac{1}{4\pi}\, Lap\; curl\, \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \tag{147^a}$$

a

$$-\frac{1}{4\pi}\, New\; div\, \mathbf{v} = \mathbf{v}_2, \tag{147^b}$$

obdržíme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

Rozložili jsme tedy takový vektor $\mathbf{v}$ ve dva jiné $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$, stanovené rovnicemi (147). O prvním z těchto vektorů $\mathbf{v}_1$ dokážeme, že jeho divergence rovná se nulle, o druhém $\mathbf{v}_2$, že jeho curl roven jest nulle. Neboť

$$div\, \mathbf{v}_1 = \frac{1}{4\pi}\, div\; Lap\; curl\, \mathbf{v},$$

což dle (143) se rovná $\frac{1}{4\pi}$ *div curl Lap* $\mathbf{v}$; avšak divergence curlu kteréhokoli vektoru rovna jest nulle, tudíž také

$$div\ \mathbf{v}_1 = 0.$$

Podobně

$$curl\ \mathbf{v}_2 = -\frac{1}{4\pi}\ curl\ New\ div\ \mathbf{v},$$

což dle (142) rovno jest $-\frac{1}{4\pi}$ *curl* ∇ *Max* $\mathbf{v}$; ale dle (107) curl derivace ∇ skaláru roven jest nulle, tudíž také

$$curl\ \mathbf{v}_2 = 0.$$

Je-li dáno pole vektorové, jehož potenciál jest konečný a nepřetržitý, můžeme každý jeho vektor $\mathbf{v}$ rozložiti uvedeným způsobem ve dvě složky $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$; tím nabudeme dvou nových polí, z nichž první jest solenoidální, druhé irrotationální. Tento rozklad daného pole vektorového v pole beze zdrojů a v pole beze vírů provésti lze jen jediným způsobem.

Předpokládejme nyní, že pole vektorové jest všeobecnější; vektorová funkce pole určující nemá potenciálu, ale její divergence i její curl mají tento úkon. Každý vektor $\mathbf{v}$ můžeme vyjádřiti součtem tří jiných vektorů:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \qquad (\pi)$$

z nichž dva můžeme voliti libovolně. Položme tedy opět dle (147)

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{4\pi}\ Lap\ curl\ \mathbf{v}$$

a

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{1}{4\pi}\ New\ div\ \mathbf{v};$$

i bude jako v případě předešlém $div\ \mathbf{v}_1 = 0$, $curl\ \mathbf{v}_2 = 0$.

Dokážeme snadno, že *curl* daného vektoru $\mathbf{v}$ rovná se *curlu* prvního sčítance $\mathbf{v}_1$ a že *div* $\mathbf{v}$ rovná se *div* druhého sčítance $\mathbf{v}_2$.

Jest totiž

$$curl\ \mathbf{v}_1 = \frac{1}{4\pi}\ curl\ Lap\ curl\ \mathbf{v}$$

nebo dle (136^b), dosadíme-li v této rovnici za $\mathbf{v}$ vektor *curl* $\mathbf{v}$, též

$$curl\ \mathbf{v}_1 = \frac{1}{4\pi}\ curl\ curl\ Pot\ curl\ \mathbf{v}.$$

Položme v rovnici (111) *Pot curl* **v** místo vektoru **v** a dělme ji pak 4π; tím vyjde

$$\frac{1}{4\pi} curl^2 Pot\, curl\, \mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \nabla\, div\, Pot\, curl\, \mathbf{v} - \frac{1}{4\pi} \nabla^2 Pot\, curl\, \mathbf{v}.$$

První sčítanec na pravé straně $\frac{1}{4\pi} \nabla\, div\, Pot\, curl\, \mathbf{v}$ vzhledem k (131^b) jest

$$\frac{1}{4\pi} \nabla\, Pot\, div\, curl\, \mathbf{v} = 0,$$

ježto divergence curlu kteréhokoli vektoru rovná se nulle. Druhý sčítanec $-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 Pot\, curl\, \mathbf{v}$ rovná se dle rovnice Laplace-Poissonovy (146^b), jíž, jak předpokládáme, *curl* **v** vyhovuje,

$$-\frac{1}{4\pi} \cdot -4\pi\, curl\, \mathbf{v} = curl\, \mathbf{v}.$$

Tudíž $$curl\, \mathbf{v}_1 = curl\, \mathbf{v};$$

z toho jde, že *curl* třetí složky $\mathbf{v}_3$ vektoru **v** v rovnici (π) se musí rovnati nulle (ježto $curl\, \mathbf{v}_2 = 0$).

Co se týče druhé složky $\mathbf{v}_2$, jest

$$div\, \mathbf{v}_2 = -\frac{1}{4\pi}\, div\, New\, div\, \mathbf{v};$$

ježto *div* **v** vyhovuje rovnici Laplace-Poissonově, bude dle (145^d)

$$div\, New\, div\, \mathbf{v} = -4\pi\, div\, \mathbf{v},$$

tudíž $$div\, \mathbf{v}_2 = div\, \mathbf{v}.$$

Z toho jde, že *div* třetí složky $\mathbf{v}_3$ v rovnici (π) rovna jest nulle, (ježto $div\, \mathbf{v}_1 = 0$).

Lze tudíž vektor **v** rozvrhnouti ve tři jiné, z nichž první má divergenci rovnou nulle, druhý curl rovný nulle a t. i divergenci i curl rovný nulle.

Zmíněné všeobecnější pole vektorové můžeme pak nahraditi třemi poli: první jest beze zdrojů, druhé bez vírů a třetí beze zdrojů i bez vírů.

Končíce tímto stať o poli vektorovém poznamenáváme, že v tomto úvodu jsme se obmezili jenom na věty a vzorce důležitější; podrobnější poučení nalezne čtenář ve spisech obšírnějších, zvláště ve Gibbs-Wilsonově „Vector Analysis“, dle níž jest též zpracována předcházející část tohoto pojednání.

(Pokrač).