Karel Petr

O jedné větě pro substituce automorfní kvadratických forem s reálnými součiniteli

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 448--458

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122949

každé rameno evoluty AB je stejným ramenem na opačné straně vyváženo)

$$O_1 - O_2 = k\, Mg\varrho \cos^3 \alpha \,. \tag{7}$$

Hotový regulátor (obr. 4.) přijímá aperiodicky v několika sekundách různé sklony příslušné různým momentům O_2. Jak přesně je isochroní, zkusíme až na observatoři a zároveň doplníme předcházející statický výklad příslušným dodatkem dynamickým.

O jedné větě pro substituce automorfní kvadratických forem s reálnými součiniteli.

Napsal **K. Petr.**

Účelem tohoto článku jest odvoditi některé věty o kořenech rovnic sestrojených na základě determinantů nepřímo symmetrických a použíti pak těchto vět ku vyšetřování kořenů rovnic charakteristických pro automorfie kvadratických forem, při čemž vycházím od formulí *Hermitových* (Cambridge and Dublin Math. Journal, sv. 9.; Oeuvres, sv. I., str. 290 a n.). Dospějeme tak ku větě, která jest obsažena ve větě *Loewyově* (Nova Acta Leopoldina, sv. 71., str. 427.).

I.

Vezměme v úvahu determinant tvaru

$$D = \left| \begin{array}{c:c} a_{ik} & b_{ik'} \\ \hdashline b_{i'k} & a'_{i'k'} \end{array} \right|, \tag{1}$$

kde

$$i, k = 1, 2, 3, \ldots p; \; i', k' = p + 1, p + 2, \ldots; \; p + q;$$

$$a_{ik} = -a_{ki}, \; a'_{i'k'} = -a'_{k'i'},$$

při $i \neq k$, $i' \neq k'$,

$$b_{ik'} = b_{k'i}, \; a_{ii} = a'_{i'i'} = \lambda.$$

Determinant daný nemění svou hodnotu, zaměníme-li u všech b znaménko, jakž ihned jest patrno, násobíme-li zápornou jednotkou posledních q sloupců a zároveň posledních q řádek Podobně jest jasno, že jest daný determinant polynomem v λ obsahující buď jenom sudé anebo jenom liché mocniny λ, dle toho, je-li $p+q$ sudé anebo liché. Můžeme tudíž psáti

$$D = f(\lambda^2),\ \text{jestliže } p+q \text{ jest sudé;}$$

$$D = \lambda f(\lambda^2),\ \text{je-li } p+q \text{ liché;}$$

jest pak $f(\lambda^2) = 0$ *rovnice stupně* $E\,\dfrac{p+q}{2}$ *v* λ^2, *jíž v následujícím se budeme zabývati*, při čemž o číslech a, a' a b budeme předpokládati, že jsou *reálná*. Hlavním úkolem naším bude vyšetřovati počet kořenů záporných rovnice $f(x) = 0$.

O determinantu D jest konečně poznamenati, že je-li $p+q$ sudé, se pro $\lambda = 0$ rovná čtverci, racionálné celistvé funkce čísel a, a', b násobenému $(-1)^q$. To vyplývá z okolnosti, že násobíme-li při $\lambda = 0$ posledních q řádek zápornou jednotkou, dostáváme determinant nepřímo symmetrický (t. j. determinant, v němž prvky hlavní diagonály jakož i součet dvou prvků symmetricky ku hlavní diagonále položených jsou vždy rovny nulle).

Hleďme sestrojiti u rovnice $f(x) = 0$ řadu funkcí majících aspoň částečně vlastnosti řady funkcí Sturmových. Za tím účelem budeme vyšetřovati — podobně, jako se to děje u rovnice sekulární — řadu hlavních subdeterminantů. Subdeterminant, který dostáváme z D vynecháním řádků o indexech $i_1, i_2, \ldots i_\mu$ a sloupců o indexech $j_1, j_2, \ldots j_\mu$, označíme stručně

$$\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots & i_\mu \\ j_1, & j_2, & \ldots & j_\mu \end{pmatrix}.$$

I jest, jak známo, pro každý determinant

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = D.\begin{pmatrix}1, & 1\\2, & 2\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Buď nejprve $p > 1$. Násobíme-li v $\binom{1}{2}$ prvních $p-1$ sloupců a posledních q řádků -1, změníme-li ještě λ v $-\lambda$ a řádky ve sloupce a naopak, přemění se $\binom{1}{2}$ ve $\binom{2}{1}$. Píšeme-li tedy pro okamžik $\binom{1}{2} = \varphi(\lambda)$ a $\binom{2}{1} = \psi(\lambda)$, jest

$$(-1)^{p+q-1}\varphi(-\lambda) = \psi(\lambda).$$

Je-li tudíž

$$\varphi(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^3 + \ldots,$$

jest

$$\psi(\lambda) = (A_0 - A_1\lambda + A_2\lambda^2 - A_3\lambda^3 + \ldots) \,.\, (-1)^{p+q-1}$$

a

$$\varphi(\lambda)\,\psi(\lambda) = (-1)^{p+q-1}\,[(A_0 + A_2\lambda^2 + \ldots)^2 - \lambda^2(A_1 + A_3\lambda^2 + \ldots)^2].$$

Tak jest patrno, že *při záporném* $x = \lambda^2$ *a* $p > 1$ *jest součin* $\varphi(\lambda)\,\psi(\lambda)$ *záporný nebo kladný dle toho, je-li* $p + q$ *sudé či liché.*

Podobně lze odvoditi výsledky příslušné ku $p = 1$ a $p = 0$. Pro $p = 0$ jest věta právě odvozená také platna; *pro* $p = 1$ *dostáváme,* že součin $\varphi(\lambda)\,\psi(\lambda)$ *jest při záporném* $x = \lambda^2$ *záporný nebo kladný dle toho, je-li* $p + q$ *liché či sudé.*

Věty tyto lze ihned applikovati na hlavní subdeterminanty

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots & \mu \\ 1, & 2, & 3, & \ldots & \mu \end{pmatrix}$$

daného determinantu D.

Na základě těchto výsledků a rovnice (2) jsme vedeni ke konstrukci řady polynomů

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ f_{p+q-1}(x), \tag{3}$$

kde jednotlivé členy této řady jsou takto definovány ($x = \lambda^2$)

$f(x) = D$, jestliže $p + q$ sudé, $f(x) = \frac{1}{\lambda} D$, jestliže $p + q$ liché,

$$f_1(x) = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ jestliže } p + q \text{ sudé,}$$

$$f_1(x) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ jestliže } p + q \text{ liché,}$$

$$f_2(x) = -\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}, \text{ jestliže } p + q \text{ sudé,}$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}, \text{ jestliže } p + q \text{ liché,}$$

. . . .

obecně pokud $\mu \leqq p$

$$f_\mu(x) = (-1)^{\mu(p+q) + E\frac{\mu}{2}} \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots \mu \\ 1, 2, \ldots \mu \end{pmatrix},$$

když $p + q - \mu$ jest sudé,

$$f_\mu(x) = (-1)^{E\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots \mu \\ 1, 2, \ldots \mu \end{pmatrix},$$

když $p + q - \mu$ jest liché.

Pro $\mu > p$ dostáváme $f_\mu(x)$ z výrazů právě napsaných, násobíme-li je ještě $(-1)^{\mu - p}$. Je-li na př. $p = 6$, $q = 4$, jest řada (3) shodna s řadou

$$D, \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix}, -\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 1, 2, 3, 4, 5 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{pmatrix}, +\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{pmatrix},$$

$$+\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \end{pmatrix}, -\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \end{pmatrix}.$$

Učiňme nejprve předpoklad, že pro žádnou zápornou hodnotu proměnné x se dvě sousední funkce z řady (3) současně nestávají nullou. Pak má řada funkcí (3) dle vět svrchu dokázaných tu vlastnost, že, zmizí-li pro některou zápornou hodnotu x jeden z vnitřních členů té řady, oba sousední mají protivná znaménka. Přejde-li proměnná x od záporné hodnoty a ku záporné hodnotě b, nastává přírůstek, po př. úbytek změn znaménkových v řadě (3) jenom při přechodu proměnné x záporným kořenem prvého členu $f(x)$, (poslední člen jest konstantní). *Má-li tedy řada (3), dosadíme-li tam za x zápornou hodnotu a A změn znaménkových, pro $x = b$ $(b < 0)$, pak B změn znaménkových, můžeme tvrditi, že mezi a a b má rovnice $f(x) = 0$ aspoň $| A - B |$ kořenů.*

Věta tato jest dokázána za předpokladu, že pro žádnou zápornou hodnotu proměnné x se dvě sousední funkce z řady (3) nestávají současně nullou. Avšak tento předpoklad dá se snadno odstraniti způsobem známým (užívaným při rovnici sekulární), jestliže aspoň pro $x = a$ resp. pro $x = b$ žádné ze dvou sousedních funkcí řady (3) nejsou rovny nulle; platí tudíž ona věta *obecně* až na omezení právě uvedené, týkající se hodnot a, b pro neodvisle proměnnou.

Pro náš účel jest nejdůležitější věcí znáti vůbec počet kořenů záporných rovnice $f(x) = 0$. Za tím účelem dosadíme do (3) za x hodnotu zápornou o tak veliké absolutní hodnotě, aby již člen obsahující nejvyšší mocninu proměnné udával znaménkem svým znaménko příslušného mnohočlenu (t. j. krátce řečeno: dosadíme $x = -\infty$); pak ještě položíme $x = 0$.

Řada (3) dává nám pro $x = -\infty$ p změn znaménkových; neboť prvých $p + 1$ členů má stále střídavá, zbývající pak členové vesměs stejná znaménka.

Při výpočtu změn znaménkových pro $x = 0$ rozeznávejme dva případy, buď jest $p + q$ sudé anebo liché. Je-li $p + q$ sudé, redukují se prvý, třetí, pátý, ... člen na čtverce z polynomů čísel a, b, a', jež nejsou identicky rovny nulle; takže nejsou-li tyto členy rovny nulle, můžeme znaménko jich udati, od členu $p + 1$-vého pak můžeme udati znaménka všech členů od nully různých. Dostáváme tu následující pořadí znamének (nahražujíce znaménka nám neznámá anebo taková, že nám na nich nezáleží, tečkou).

A) p i q sudé:

$$+, \cdot, -, \cdot, +, \ldots, \underbrace{(-1)^{\frac{p}{2}}}_{\text{člen } p+1\text{-vý}}, -(-1)^{\frac{p}{2}}, \cdot,$$

$$+(-1)^{\frac{p}{2}}, \ldots, (-1)^{\frac{p+q}{2}}, (-1)^{\frac{p+q}{2}}$$

B) p i q liché:

$$-, \cdot, +, \cdot, -, \ldots, \underbrace{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}_{\text{člen } p\text{-tý}}, (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \cdot,$$

$$-(-1)^{\frac{p-1}{2}}, \cdot, \ldots, (-1)^{\frac{p-q-2}{2}}.$$

Počet změn znaménkových jest v případě *A*) i *B*) $\frac{p+q}{2}$, není-li ovšem žádné z čísel, jichž znaménko bylo vytčeno, rovno nulle. I jest za tohoto omezení při $p + q$ sudém *počet* *kořenů záporných rovný anebo větší než číslo*

$$\left| p - \frac{p+q}{2} \right| = \left| \frac{p-q}{2} \right|.$$

Avšak kořeny rovnice $f(x) = 0$ jsou spojité funkce čísel a, b, a'; konvergují-li tudíž tato čísla k nějakému systému hodnot, pro nějž některé nebo více čísel, jichž znaménka v A, resp. v B byla vytčena, jsou rovny nulle, pak kořeny záporné rovnice $f(x) = 0$ v počtu aspoň $\left| \frac{p-q}{2} \right|$ konvergují ku hodnotám buď záporným anebo nulle rovným, takže můžeme obecně tvrditi: *Rovnice $f(x) = 0$ má, když $p + q$ jest sudé, aspoň*

$$\left| \frac{p-q}{2} \right|$$

kořenů, jež jsou záporny, po případě z části i nulle rovny.

Je-li $p + q$ liché, tu abstrahujeme-li od prvního členu řady (3), vidíme ihned dle právě provedeného vyšetření případu, kdy $p + q$ jest sudé, že ve zbývajících členech řady (3) po dosazení za $x = 0$ jest $\frac{p+q-1}{2}$ změn znaménkových, jsou-li ovšem členové nahoře opětovně vytčení od nully různí; jest tedy v celé řadě (3), položíme-li $x = 0$, nejvýše

$$\frac{p+q-1}{2} + 1 = \frac{p+q+1}{2}$$

změn znaménkových a *počet kořenů záporných, po případě nulle rovných rovnice $f(x) = 0$ jest při $p + q$ lichém aspoň rovný číslu*

$$\frac{p-q-1}{2}. \text{*)}$$

*) Podobně v rovnici

$$d = | a_{ik} - \delta_{ik} x | = 0; \quad i, k = 1, 2 \ldots n;$$

kde

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad \delta_{rs} = 0 \quad \text{při} \quad r \gtrless s,$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \ldots = \delta_{pp} = 1, \quad \delta_{p+1,\, p+1} = \delta_{p+2,\, p+2} = \ldots = \delta_{nn} = -1,$$

která jest velmi blízka rovnici nazvané *sekulární*, dostáváme v řadě hlavních subdeterminantů

$$d, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots & n-1 \\ 1, & 2, & \ldots & n-1 \end{pmatrix}, 1 \qquad (\beta)$$

řadu mající všechny vlastnosti funkcí Sturmových vyjma tu, aby člen druhý

Jestliže $q = 0$, jest počet kořenů záporných rovnice $f(x) = 0$ roveň stupni rovnice té; jsou tedy všechny kořeny její záporné a řada (3) má *všechny* vlastnosti řady funkcí Sturmových. Pozoruhodné pak při té řadě v tomto případě jest, že počet členů jejích jest rovný dvojnásobnému stupni rovnice $f(x) = 0$.

II.

Za účelem snadného porozumění následujícímu podám nejprve stručně Hermiteovo odvození (l. c.) formulí pro automorfie kvadratických forem. Nechť substituce lineární

$$X_i = c_{i_1} x_1 + c_{i_2} x_2 + \ldots + c_{in} x_n; \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

jest automorfií pro kvadratickou formu $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, t. j. nechť jest

$$f(X_1, X_2, \ldots X_n) = f(x_1, x_2, \ldots x_n). \tag{2}$$

Charakteristickou rovnici této automorfie dostaneme, hledajíce takový systém hodnot X_i, aby byl úměrný příslušnému systému hodnot x_i. Jestliže $X_i = \varrho x_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, pak máme ihned z (1) pro ϱ rovnici

$$| c_{ik} - \delta_{ik}\varrho | = 0; \quad i, k = 1, 2, \ldots n, \quad \delta_{ik} = 0 \text{ při } i \gtrless k, \quad \delta_{ii} = 1 \tag{3}$$

která právě sluje charakteristickou rovnicí automorfie (1).

měl pro nullové body členu prvého totéž znaménko jako derivace členu prvého (běží-li o kořeny jednoduché; případ, že daná rovnice anebo některý další člen řady (β) má kořeny mnohonásobné, můžeme známou úvahou podobně jako svrchu vyloučiti). Dosadíme-li do řady (β) za x jednou $-\infty$, jednou ∞, dostáváme srovnáním počtů změn znaménkových podobně jako svrchu větu: *Počet kořenů reálných rovnice* (α) *jest aspoň* $|p - q|$. Při tom $p + q = n$.

Na rovnici (α) lze vždy převésti rovnici (homogenní v x, y)

$$|a_{ik}x - b_{ik}y| = 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots n \qquad a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki} \tag{γ}$$

způsobem na snadě ležícím. Platí pak pro tuto rovnici věta: Počet kořenů reálných rovnice (γ) jest aspoň rovný většímu z čísel

$$|p' - q'|, \quad |p'' - q''|,$$

kde $p' - q'$, $p'' - q''$ jsou signatury kvadratických forem

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k, \quad \sum_{ik} b_{ik} x_i x_k.$$

Ku vyhledání automorfií zavádí Hermite nový systém proměnných ξ_i rovnicemi

$$X_i + x_i = 2\xi_i; \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{4}$$

což jest vždy přípustno, nemá-li charakteristická rovnice kořen -1, neboť jenom za tohoto předpokladu dají se x_i i X_i vyjádřiti na základě (4) a (1) pomocí ξ_i. Dostáváme tedy touto cestou automorfie, jichž charakteristická rovnice nemá kořen -1. Z (4) a (2) ihned následuje

$$f(2\xi_1 - x_1, 2\xi_2 - x_2, \ldots 2\xi_n - x_n) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

aneb

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial \xi_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial \xi_n} = 2f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n). \tag{5}$$

Jedno řešení této rovnice patrně jest $x_i = \xi_i$, nejobecnější pak řešení můžeme, není-li diskriminant dané formy kvadratické rovný nulle, jakož chceme předpokládati, psáti ve tvaru

$$x_i = \xi_i + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n}{}' \lambda_{ik} \frac{\partial f}{\partial \xi_k}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots n, \\ \lambda_{rs} = -\lambda_{sr}, \end{matrix} \quad \lambda_{rr} = 0. \tag{6}$$

Pro X_i dostáváme z (4)

$$X_i = \xi_i - \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} \frac{\partial f}{\partial \xi_k}. \tag{7}$$

Abychom obdrželi automorfie ve tvaru (1), postačí řešiti (6) dle ξ_i a dosaditi do (7); při tom jest se omeziti jenom na takové systémy hodnot pro λ_{ik}, jež činí determinant z koefficientů čísel ξ_i v (6) od nully různým a dostaneme tak *všecky* automorfie o kořenech charakteristické rovnice různých od -1.

Jelikož chceme odvoditi větu o kořenech rovnic charakteristických při automorfiích forem kvadratických a kořeny ty jsou vůči lineární substituci proměnných invarianty (jakož z hořejší definice ihned vyplývá), zavedeme vhodnou lineární substitucí nové proměnné tak, aby se daná kvadratická forma změnila v součet čtverců. Jsou-li koefficienty dané formy reálné, *což budeme předpokládati,* lze lineárnou substitucí s reálnými součiniteli dáti dané formě tvar

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \ldots - x_n^2, \; p + q = n \tag{A}$$

od kterého tedy bez jakékoliv újmy všeobecnosti můžeme vycházeti. Pro tento tvar změní se rovnice (6), (7) v

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \xi_i + \lambda_{i1}\xi_i + \lambda_{i2}\xi_2 + \ldots \\ &\quad + \lambda_{ip}\xi_p - \lambda_{i,p+1}\xi_{p+1} - \ldots - \lambda_{in}\xi_n, \\ X_i &= \xi_i - \lambda_{i1}\xi_1 - \lambda_{i2}\xi_2 - \ldots \\ &\quad - \lambda_{ip}\xi_p + \lambda_{i,p+1}\xi_{p+1} + \ldots + \lambda_{in}\xi_n, \end{aligned}\right\} i = 1, 2, \ldots n. \quad \begin{matrix}(6') \\ \\ (7')\end{matrix}$$

Abychom dospěli ku jednoduchému vyjádření rovnice charakteristické, dosaďme do vztahu $X_i = \varrho x_i$ výrazy (6'), (7'); obdržíme systém rovnic

$$\begin{aligned} 0 = \xi_i(\varrho - 1) &+ \lambda_{i1}(\varrho + 1)\xi_1 + \lambda_{i2}(\varrho + 1)\xi_2 + \ldots \\ &+ \lambda_{ip}(\varrho + 1)\xi_p - \lambda_{i,p+1}(\varrho + 1)\xi_{p+1} - \ldots \\ &- \lambda_{in}(\varrho + 1)\xi_n; \quad i = 1, 2, \ldots n; \end{aligned}$$

ze kterého eliminací proměnných ξ_i ihned vyplývá rovnice charakteristická ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \varrho-1, & \lambda_{12}(\varrho+1), & \ldots \lambda_{1p}(\varrho+1), & -\lambda_{1,p+1}(\varrho+1), & \ldots -\lambda_{1n}(\varrho+1) \\ \lambda_{21}(\varrho+1), & \varrho-1, & \ldots \lambda_{2p}(\varrho+1), & -\lambda_{2,p+1}(\varrho+1), & \ldots -\lambda_{2n}(\varrho+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{p1}(\varrho+1), & \lambda_{p2}(\varrho+1), & \ldots \varrho-1, & -\lambda_{p,p+1}(\varrho+1), & \ldots -\lambda_{pn}(\varrho+1) \\ \lambda_{p+1,1}(\varrho+1), & \lambda_{p+1,2}(\varrho+1), & \ldots \lambda_{p+1,p}(\varrho+1), & (\varrho-1), & \ldots -\lambda_{p+1,n}(\varrho+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n,1}(\varrho+1), & \lambda_{n,2}(\varrho+1), & \ldots \lambda_{n,p}(\varrho+1), & -\lambda_{n,p+1}(\varrho+1), & \ldots \varrho-1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

Z tohoto tvaru rovnice jest nejprve patrno, že žádná automorfie vyplývající z formulí Hermiteových nemá při charakteristické rovnici kořen -1. Neboť dosadíme-li do (8) $\varrho = -1$, dostaneme na levé straně $(-2)^n$. Dělíme-li řádky v (8) výrazem $\varrho + 1$, a klademe-li

$$\frac{\varrho - 1}{\varrho + 1} = \lambda, \tag{9}$$

obdržíme rovnici

$$\begin{vmatrix} \lambda, & \lambda_{12}, & \ldots \lambda_{1p}, & -\lambda_{1,p+1}, & \ldots -\lambda_{1n} \\ \lambda_{21}, & \lambda, & \ldots \lambda_{2p}, & -\lambda_{2,p+1}, & \ldots -\lambda_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{p1}, & \lambda_{p2}, & \ldots \lambda, & -\lambda_{p,p+1}, & \ldots -\lambda_{pn} \\ \lambda_{p+1,1}, & \lambda_{p+1,2}, & \ldots \lambda_{p+1,p}, & \lambda, & \ldots -\lambda_{p+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n1}, & \lambda_{n2}, & \ldots \lambda_{np}, & -\lambda_{n,p+1}, & \ldots \lambda \end{vmatrix}$$

která jest téhož tvaru jako rovnice (1) odst. I. Z ní plyne bezprostředně, že rovnice (8) jest rovnicí reciprokou, neboť záměnou ϱ v $\frac{1}{\varrho}$ mění se λ v $-\lambda$.

Jelikož každé hodnotě ryze imaginárné pro λ přísluší dle (9) ϱ o absolutní hodnotě rovné 1 a hodnotě $\lambda = 0$ přísluší $\varrho = 1$, můžeme na základě věty odvozené v odstavci I. ihned vysloviti větu: Rovnice (8) má, jsou-li λ_{ik} čísla reálná, aspoň $p - q$ kořenů, jichž absolutní hodnota jest 1. (Při n lichém jest vždy jeden z těchto kořenů rovný 1, jak snadno patrno.)

Automorfie, jichž charakteristická rovnice má z části anebo vesměs kořeny rovny -1, lze vesměs obdržeti limitním processem z automorfií Hermiteových, jakož jest známo a jakož lehce možno dokázati. Postačí totiž v každém jednotlivém případě nechati vzrůstati čísla λ_{ik} nade všecky meze určitým způsobem, čímž dospějeme ku všem automorfiím dosud vyloučeným. Platí tudíž věta dokázaná pro automorfie Hermiteovy pro všecky automorfie kvadratické dané formy vůbec, čímž docházíme ku větě:

Charakteristická rovnice pro každou reálnou automorfii dané kvadratické formy s reálnými koefficienty má aspoň $|p-q|$ kořenů, jichž absolutní hodnota jest rovna 1. Při tom jest $p-q$ signatura dané kvadratické formy.

Věta tato jest část věty dokázáné po prvé Loewym (l. c.) a to na základě kanonického tvaru, jejž lze dáti lineární substitucí daných kořenech rovnice charakteristické příslušné.

Podotknouti ještě jest, že jsou vždy automorfie u dané kvadratické formy, kde počet kořenů charakteristické rovnice jest právě $|p-q|$. Tak pro svrchu vytčený tvar (A) jest automorfií tato substituce (předpokládejme $p > q$)

$$X_1 - X_{p+1} = a_1(x_1 - x_{p+1}), \quad X_1 + X_{p+1} = \frac{1}{a_1}(x_1 + x_{p+1}),$$

$$X_2 - X_{p+2} = a_2(x_2 - x_{p+2}), \quad X_2 + X_{p+2} = \frac{1}{a_2}(x_2 + x_{p+2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_q - X_{p+q} = a_q(x_q - x_{p+q}), \quad X_q + X_{p+q} = \frac{1}{a_q}(x_q + x_{p+q}),$$

$$X_{q+1} = x_{q+1}, \quad X_{q+2} = x_{q+2}, \ldots X_p = x_p.$$

Tato automorfie má při rovnici charakteristické $p - q$ kořenů rovných 1, ostatní pak kořeny jsou $a_1, \frac{1}{a_1}, a_2, \frac{1}{a_2}, \ldots a_q, \frac{1}{a_q}$, čímž tvrzení učiněné dokázáno. Ať tedy jakkoli převedeme reálnou substitucí danou kvadratickou formu na tvar (A), číslo $|p - q|$ jest vždy též. Při kvadratických formách o lichém počtu proměnných vyplývá dokonce vzhledem k okolnosti, že lineární reálnou substitucí znaménko diskriminantu se nemění, stálost čísla $p - q$, tedy t. zv. zákon setrvačnosti. Ze zákona setrvačnosti však platného pro n liché následuje ihned zákon setrvačnosti pro n sudé. Stačí, je-li n sudé, místo kvadratické formy $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ vzíti v úvahu formu kvadratickou

$$x_0^2 + f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

kde x_0 jest nová proměnná.

Jest tudíž zákon setrvačnosti v úzkém vztahu se svrchu dokázanou větou Loewyovou. Loewy zákon setrvačnosti při důkaze svém předpokládá.

O fosforoskopu vibračním.

Sděluje Dr. **Václav Posejpal.**

Fosforoskop jest přístroj pro studium fosforescence nezbytný. Prvé přístroje toho druhu popsal a sestrojil Ed. Becquerel[1]), jehož práce v oboru fosforescence zůstanou pro vždy klassickými a základními, znamenajíce novou epochu na tomto poli. Základní myšlenka Becquerelových přístrojů jest jednoduchá: zkoumané těleso, jež krátce budeme zváti fosforem, se umístí do dokonale tmavé skřínky, opatřené dvěma otvory. Jeden, po případě dva otáčivé kotouče s otvory umožňují, že se těleso střídavě jedním z otvorů ve skřínce osvětluje, druhým pozoruje. Stroje Becquerelem na této myšlence založené byly pak specielně upraveny buď pro studium fosforescence těles průhledných neb neprůhledných a dovolovaly snížiti interval mezi osvětlením a pozorováním až na miliontinu sekundy.

---

[1]) Ann. chim. et. phys. (3) 55. 5—119. 1859.