hodnoty K_{II}, čili že citlivost methody I dá se více stupňovati než methody II. Poněvadž prostředky, jež jsem měl k disposici, nedovolovaly mi dalšího stupňování method těchto, zůstává experimentální rozhodnutí této otázky zatím nerozřešeno.*)

Budiž ještě podotknuto, že udaného zde spojení elektrometru je možno užíti nejen ku srovnávání kapacit, nýbrž že stejně dobře dalo by se ho použíti pro srovnávání velikých odporů (jmenovitě elektrolytických) i velikých samoindukcí. Též stojí za povšimnutí, že měření nejsou tu omezena pouze na střídavý proud nízké frequence, nýbrž že stejně by se jich dalo užíti i pro frequence vysoké. Jediná podmínka, jež pro užití tohoto způsobu měření musí býti splněna, je ta, aby měřená kapacita, samoindukce neb odpor snesly na svých pólech značnou potenciálnou differenci.

Výsledek.

Popsány jsou dvě jednoduché methody, proveditelné skromnými prostředky, pro srovnání kapacit s chybou pouze několika málo setin procenta užitím elektrometru ve spojení, jež liší se od užívaného kvadrantového nebo jehlového pouze přepnutím obalu na jiné místo.

Brno, fysikální ústav české techniky.

O vlivu dopružování na kmity pružných těles.

Napsal dr. **Frant. Nachtikal.**

1. *Definice dopružování.* Zjev dopružování prvý pozoroval Weber. Když bylo nezkroucené hedvábné vlákno po delší dobu napiato a pak náhle puštěno, nevrátí se úplně do původní délky. O jistou část zkrátí se ihned (zjev *pružnosti*), ale pak se dále ještě po několik hodin zkracuje s ubývající rychlostí (zjev *dopružování*); konečná jeho délka je však o něco větší než délka

*) Dle informativního měření jež mi bylo možno provésti pro methodu druhou, vycházelo, že citlivosti ubývá ještě rychleji, než by dle udané hodnoty B (určené akkumulátory) vycházelo.

před napětím (trvalé prodloužení). Podobné úkazy byly pozorovány i na jiných látkách. Zjevy tyto, zejména u látek se značným dopružováním, jsou značně složité a jejich theoretický výklad obtížný.

Pokud jde o látky, jež jeví jen nepatrné dopružování a žádných trvalých deformací, lze poměrně jednoduše zavésti dopružování v počet. Podstatou dopružování jest, že určitý stav rovnovážný nebo pohybový nenastává ihned, jakmile síly počaly působiti, nýbrž potřebuje k tomu jistého času; skutečný stav se onomu konečnému stavu s rostoucím časem asymptoticky blíží. Účinkem vnějších i vnitřních sil v určitém čase mělo by býti okamžité zrychlení $\ddot{x}_0$; skutečné zrychlení $\ddot{x}$ liší se od této hodnoty $\ddot{x}_0$. V prvém přiblížení lze předpokládati, že rozdíl obou $\ddot{x}_0 - \ddot{x}$ zmenšuje se časově s rychlostí úměrnou tomuto rozdílu, což vede ke vztahu

$$\frac{d\ddot{x}}{dt} = n(\ddot{x}_0 - \ddot{x}) = \frac{1}{\tau}(\ddot{x}_0 - \ddot{x}). \qquad (1)$$

Koefficient n má rozměr převratné doby; $\frac{1}{n} = \tau$ znamená dobu, za kterou by se rozdíl konečného a skutečného zrychlení zmenšil na nullu, kdyby se zmenšování dálo stálou rychlostí, což ovšem není splněno. Kdyby však konečné zrychlení $\ddot{x}_0$ mělo stálou hodnotu, byl by integrálem rovnice (1)

$$\ddot{x}_0 - \ddot{x} = (\ddot{x}_0 - \ddot{x}_1)\, e^{-\frac{t}{\tau}},$$

při čemž $\ddot{x}_1$ znamená skutečné zrychlení v čase $t = 0$. Za dobu τ zmenší se rozdíl zrychlení konečného a skutečného $\ddot{x}_0 - \ddot{x}$ na hodnotu $\frac{1}{e}$ původní velikosti. Podle Maxwella lze nazvati dobu τ *relaxační dobou*. Látky, jevící malé dopružování, mají relaxační dobu τ velmi malou.

Rovnicí (1) je vlastně definován určitý zjev, jejž lze sice stručně nazvati dopružováním, ale jenž přece nevystihuje celý obor zjevů pozorovaných, jež jsou značně složitější. Látky jevící dopružování jsou zpravidla také tažné nebo tvárlivé a vykazují proto po každé změně tvaru trvalou deformaci; k tomu tato theorie nepřihlíží.

2. *Základní pohybová rovnice.* Označme okamžitou výchylku pružného tělesa x. Zrychlení, jaké by způsobily v čase t vnější síly samy pro sebe, budiž nějakou funkcí času X; účinkem pružnosti přistupuje k tomu zrychlení $-a^2x$, při čemž $a = \frac{2\pi}{T}$ a tedy T je vlastní doba kmitová, kdyby nebylo dopružování. Pro všeobecnost předpokládejme ještě tlumení, jímž vzniká zrychlení $-\lambda\frac{dx}{dt}$. Kdyby nebylo dopružování, bylo by tedy okamžité zrychlení

$$\ddot{x}_0 = X - a^2x - \lambda\frac{dx}{dt}.$$

Dosazením do rovnice (1) dostáváme základní pohybovou rovnici, píšeme-li ještě $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$,

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{1}{\tau}\left(X - a^2x - \lambda\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

anebo

$$\tau\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + a^2x = X. \tag{2}$$

Jak patrno, touž rovnici obdržíme, když k pohybové rovnici, jaká platí pro pohyby vlivem pružnosti bez dopružování,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + a^2x = X$$

připojíme člen dopružováním vzniklý $\tau\frac{d^3x}{dt^3}$, znamená-li τ dobu relaxační.

3. *Těleso volné.* Nejdůležitějším je případ, kdy není vnějších sil, tedy $X = 0$. Pohybová rovnice v tomto případu jest

$$\tau\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + a^2x = 0 \tag{3}$$

a má integrál tvaru

$$x = Ce^{\alpha t},$$

kdež koefficient α vyhovuje rovnici

$$\tau\alpha^3 + \alpha^2 + \lambda\alpha + a^2 = 0. \tag{4}$$

Při malém dopružování a tlumení má tato rovnice jeden kořen reálný a dva soujemné, jež označíme

$$\alpha_1 = -m, \quad \alpha_2 = -l + ib, \quad \alpha_3 = -l - ib.$$

Obecný integrál lze pak uvésti do tvaru

$$x = Ce^{-mt} + e^{-lt}(A \sin bt + B \cos bt), \qquad (5)$$

kdež C, A, B jsou tři integrační konstanty.

Lze ovšem snadno vyjádřiti kořeny rovnice (4) pomocí koefficientů τ, λ a a, ale výrazy ty jsou nepřehledné. Fysikální význam dopružování lépe vynikne, rozvineme-li výrazy ty v řadu a podržíme-li vedle hlavního členu pouze prvý člen korrekční. Předpokládáme při tom, že τ a λ jsou veličiny malé prvého řádu. Tak dostáváme:

$$m = \frac{1}{\tau} + a^2\tau - \lambda$$

$$l = \tfrac{1}{2}(\lambda - a^2\tau)$$

$$b = a\left(1 - \tfrac{5}{8}a^2\tau^2 - \tfrac{1}{8}\frac{\lambda^2}{a^2} + \lambda\tau\right).$$

Jak z integrálu (5) vyplývá, těleso koná vlastní kmity o frekvenci $b = \frac{2\pi}{T}$ (T = vlastní doba kmitová). Bez tlumení i dopružování byla by frekvence $a = \frac{2\pi}{T_0}$. Z výrazu pro frekvenci b je zřejmo, že jak tlumení, tak i dopružování samo o sobě snižují frekvenci; při současném tlumení i dopružování přistupuje ještě člen $\lambda\tau$, jenž zvyšuje frekvenci. Změny frekvence jsou však vesměs malé veličiny druhého řádu a v prvém přiblížení nebylo by třeba k nim přihlížeti.

Kmity ty jsou však tlumené a jejich logarithmický dekrement má hodnotu

$$\pi \frac{l}{b} \doteq \frac{\pi}{2a}(\lambda - a^2\tau).$$

Jak patrno, logarithmický dekrement $\frac{\pi}{2a} . \lambda$, jaký by byl při pouhém tlumení, dopružováním se zmenšuje. Za podmínky $\lambda = a^2\tau$ vznikly by kmity netlumené. Je-li dopružování ještě větší, nebo není-li vůbec tlumení, má log. dekrement zápornou hodnotu. Amplitudy kmitů se zvětšují a mělo by se vlastně mluviti o log. inkrementu. Výsledek tento na prvý pohled zaráží, ale na jednoduchém příkladu v následujícím odstavci bude ukázán jeho fysikální význam.

Střední poloha, kolem níž se kmity dějí, jest určena vztahem

$$x_0 = Ce^{-mt},$$

v němž hodnota konstanty C je stanovena počátečními podmínkami. Střední poloha kmitů nesplývá tudíž s vlastní rovnovážnou polohou tělesa, nýbrž blíží se k ní asymptoticky s časem, úměrně s výrazem e^{-mt} anebo v prvém přiblížení $e^{-\frac{t}{\tau}}$. Zjev tento znamená relaxaci ve smyslu Maxwellově.

4. *Těleso vychýlené a puštěné.* Těleso volné bylo vychýleno o výchylku x_1, drženo v této poloze tak dlouho, až se jí přizpůsobilo $\left(\frac{d^2x}{dt^2} = 0\right)$ a pak puštěno. Počáteční podmínky v čase $t = 0$ jsou tedy:

$$x = x_1, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Dosadíme-li do těchto podmínek obecné řešení (5), dostáváme hodnoty konstant C, A, B. Omezíme-li se pouze na prvé korekční členy, jest

$$C = x_1 \,.\, a^2\tau^2, \quad A = \frac{x_1}{2}\left(a\tau + \frac{\lambda}{a}\right), \quad B = x_1\,(1 - a^2\tau^2)$$

a tedy řešení tohoto případu

$$x = x_1 \,.\, a^2\tau^2 e^{-mt} + x_1 e^{-lt}\left[\tfrac{1}{2}\left(a\tau + \frac{\lambda}{a}\right) sin\, bt \right.$$
$$\left. + (1 - a^2\tau^2)\, cos\, bt\right],$$

kdež ovšem by bylo lze položiti přibližně

$$m = \frac{1}{\tau}, \quad l = \tfrac{1}{2}\,(\lambda - a^2\tau), \quad b = a.$$

Kdyby nebylo ani tlumení ani dopružování, bylo by obecným řešením tohoto případu

$$x = x_1 \,.\, cos\, at.$$

Jak patrno, amplituda je menší, tak jako by původní výchylka byla pouze $x_1 (1 - a^2\tau^2)$. Střední poloha kmitů je na počátku $x_0 = x_1 . a^2\tau^2$.

Těleso přizpůsobilo se původní výchylce tím, že jeho střední poloha se pošinula o $x_1 . a^2\tau^2$ ve směru, ve kterém bylo vychýleno, a jen rozdíl skutečné výchylky x_1 a této střední polohy $x_1 a^2\tau^2$ podmiňuje na počátku amplitudu kmitů. Střední poloha se časově podle exponenciely blíží nulle.

Jak bylo v předešlém odstavci uvedeno, kdyby nebylo tlumení, byl by logarithmický dekrement záporný a tedy amplituda kmitů by rostla, což je na pohled proti principu energie. Na tomto případě lze vzrůst energie kmitů vyložiti. Potenciálná energie, která tělesu byla udělena výchylkou x_1, nemění se za dopružování ihned celá v energii kmitů, nýbrž jen část odpovídající výchylce $x_1 (1 - a^2\tau^2)$; zbytek určený výchylkou $x_1 . a^2\tau^2$ mění se teprve postupem času v energii kmitovou v tom poměru, jak tato výchylka dopružováním mizí, a proto amplituda roste.

Proti případu, kdy není ani dopružování ani tlumení ($x = x_1 . \cos at$), vzniká fázové zpoždění kmitů. Dobu, o kterou jsou kmity zpožděny, označme ϑ; pak z předchozího vzorce vyplývá

$$tg\, a\vartheta = \tfrac{1}{2}\left(a\tau + \frac{\lambda}{a}\right)$$

anebo v prvém přiblížení

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\left(\tau + \frac{\lambda}{a^2}\right).$$

Není-li tlumení, jest časové zpoždění kmitů

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\tau$$

stálé (nezávislé na vlastní době kmitové) a rovná se poloviční době relaxační. Tím je na tomto případě potvrzena správnost předpokladu, který činí prof. Koláček (Elektřina a magnetismus, str. 307.) o všech zjevech hysteretických, mezi něž ovšem patří dopružování.

5. *Těleso impulsem ve kmity uvedené.* Zcela obdobně lze řešiti případ, byla-li tělesu v klidu udělena v čase $t = 0$ im-

pulsem okamžitá rychlost c. Dosadíme-li do podmínečných rovnic v čase $t = 0$

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = c; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

obecné řešení (5), dostáváme pro integrační konstanty hodnoty:

$$A = \frac{c}{a}\left(1 + \tfrac{5}{8}\, a^2\tau^2 + \tfrac{1}{8}\frac{\lambda^2}{a^2} - 2\lambda\tau\right)$$

$$-B = C = c\tau^2\,(\lambda - a^2\tau).$$

Konstanta C, odpovídající členu vzniklému dopružováním, jest malou veličinou třetího řádu. Dopružování v tomto případě ustupuje zcela do pozadí, jak se ovšem dalo očekávati.

Nehledíme-li k tlumení, jest amplituda kmitů větší, než by byla bez dopružování (korrekční člen $\frac{5}{8}\, a^2\tau^2$). Příčinou toho jest, že k udělení téže rychlosti počáteční za dopružování je třeba větší impulsivní síly než bez dopružování a je tedy také dodaná energie větší. Naopak zase stejná síla impulsivní vzbudí při dopružování ihned jen menší rychlost než bez dopružování.

6. *Na těleso působí stálá síla.* Označíme-li zrychlení, jaké by stálá síla tělesu udílela, X, platí v tomto případě pohybová rovnice

$$\tau\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + a^2x = X.$$

Partikulárním integrálem této rovnice jest

$$x = \frac{X}{a^2}$$

a tedy její obecný integrál

$$x = \frac{X}{a^2} + Ce^{-mt} + e^{-lt}\,(A \sin bt + B \cos bt).$$

Bylo-li na př. těleso původně v klidu, platí pro $t = 0$ počáteční podmínky

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Dosazením dostáváme hodnoty integračních konstant

$$C = -X\tau^2, \quad A = -\frac{X}{2a^2}\left(a\tau + \frac{\lambda}{a}\right), \quad B = -\frac{X}{a^2}\,(1 - a^2\tau^2)$$

a obecné řešení je pak

$$x = \frac{X}{a^2} - X\tau^2 e^{-mt} - \frac{X}{a^2} e^{-\lambda t} \left[\tfrac{1}{2} \left(at + \frac{\lambda}{a} \right) \sin bt \right.$$

$$\left. + (1 - a^2 \tau^2) \cos bt \right].$$

Těleso kmitá, jak se dalo očekávati. Nehledíme-li na tyto kmity, výchylka silou vzbuzená není ihned $\frac{X}{a^2}$, jaká by byla bez dopružování, nýbrž jest menší o $X\tau^2$ a teprve s rostoucím časem blíží se konečné hodnotě $\frac{X}{a^2}$, což je známý úkaz, pozorovaný při dopružování. Poměr výchylky $X\tau^2$, o kterou se těleso pošinuje dopružováním, ke konečné výchylce $\frac{X}{a^2}$ jest

$$a^2 \tau^2 = \frac{4\pi^2 \tau^2}{T^2};$$

poměr tento je tudíž úměrný dvojmoci poměru doby relaxační τ a vlastní doby kmitové T.

7. *Vynucené kmity.* Na těleso působí periodická síla, jež mu udílí zrychlení určené výrazem $P \,.\, \sin pt$. Pohybová rovnice jest

$$\tau \frac{d^3 x}{dt^3} + \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + a^2 x = P \,.\, \sin pt. \tag{6}$$

Partikulární integrál této úplné rovnice má patrně tvar

$$x = P_1 \sin pt + P_2 \cos pt.$$

Dosaďme tento výraz do pohybové rovnice (6), jež musí býti pak identicky splněna; tím dostaneme dvě podmínky pro veličiny P_1 a P_2, z nichž vyplývá:

$$P_1 = P \,.\, \frac{a^2 - p^2}{(a^2 - p^2)^2 + p^2 (\lambda - p^2 \tau)^2}$$

$$P_2 = -P \,.\, \frac{p (\lambda - p^2 \tau)}{(a^2 - p^2)^2 + p^2 (\lambda - p^2 \tau)^2}.$$

Obecný integrál je tudíž

$$x = \frac{P}{(a^2 - p^2)^2 + p^2 (\lambda - p^2 \tau)^2} [(a^2 - p^2) \sin pt$$

$$- p (\lambda - p^2 \tau) \cos pt] + Ce^{-mt} + e^{-\lambda t} (A \sin bt + B \cos bt).$$

Prvý člen tohoto výrazu určuje kmity vynucené; jejich amplituda jest

$$\frac{P}{\sqrt{(a^2 - p^2)^2 + p^2(\lambda - p^2\tau)^2}}.$$

Kdyby nebylo ani dopružování ani tlumení, byly by vynucené kmity samy o sobě určeny výrazem

$$x = \frac{P}{a^2 - p^2} \cdot \sin pt.$$

Jak patrno ze srovnání s výrazem předcházejícím, amplituda vynucených kmitů se tlumením i dopružováním zmenšuje. Fázové zpoždění vynucených kmitů $p\vartheta$ proti působící periodické síle jest určeno vztahem

$$tg\, p\vartheta = p\, \frac{\lambda - p^2\tau}{a^2 - p^2}$$

anebo v prvém přiblížení

$$\vartheta = \frac{\lambda - p^2\tau}{a^2 - p^2}.$$

Jde-li o pomalé vynucené kmity, jež mají menší kmitočet než vlastní kmity tělesa, jest $a > p$. Jak bylo dříve uvedeno (odst. 3.), dopružováním zmenšuje se logarithmický dekrement vlastních kmitů. Pokud mají vzniknouti kmity opravdu tlumené, musí býti $\lambda > a^2\tau$. Za předpokladu $a > p$ jest také $\lambda > p^2\tau$ a tedy $\vartheta > 0$; vynucené kmity jsou proti periodické síle zpožděny. Ale toto zpoždění je způsobováno tlumením a ne dopružováním, jímž se vlastně fázové zpoždění zmenšuje. Kdyby nebylo tlumení, byly by vynucené kmity proti působící síle ve fázi napřed, což jest výsledek pozoruhodný.

Podobným způsobem bylo by možno řešiti případ, kdy na totéž těleso působí současně dvě síly periodické. Poněvadž pohybová rovnice (6) jest lineárná, partikulární její integrál rovná se součtu integrálů odpovídajících každé jednotlivé síle periodické zvlášť. Platí tudíž superposice výchylek a kombinační tóny nevznikají. Aby bylo možno vyložiti kombinační tóny, je třeba, jak Schaefer*) ukázal, aby se v pohybové rovnici vyskýtal kvadratický člen (na př. x^2 jako v Helmholtzově theorii nebo součin dvou derivací x podle času). Uvedená theorie dopružování tedy k výkladu kombinačních tónů nevede.

*) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. *33*, 1216. 1910.