Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohumil Bydžovský

O vytvoření geodetických křivek na rotačních ellipsoidech

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 319--330

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122935`

XIII. $\overline{Cu}$ | norm. $CuCl_2$ ve H_2O — norm. $CuCl_2$ v alkoh. — — $\frac{1}{2}$-norm. $CuCl_2$ v alkoh. — $\frac{1}{2}$-norm. $CuCl_2$ v alkoh. nasycený Hg_2Cl_2 | Hg — Hg | norm. $CuCl_2$ ve H_2O nasycený Hg_2Cl_2 — norm.

$$CuCl_2 \text{ ve } H_2O \mid \overset{+}{Cu} = -0{\cdot}0977 \textit{ Volt.}$$

Z předcházejícího vyplývá, že kapalinový článek mezi zkoumanými alkoholickými a vodnými roztoky $CuCl_2$ nepřesahuje asi hodnoty 0·10 *Volt*, při čemž roztok alkoholový nese náboj positivní.

O vytvoření geodetických křivek na rotačních ellipsoidech.

B. Bydžovský.

O geodetických křivkách na protáhlém ellipsoidu rotačním platí věta, že *každá tato křivka se promítá do roviny rovníku v křivku, kterou lze vytvořiti ellipsou, jejíž střed je pevný a jež se kotálí po této rovině.*

Tuto větu, na základě které lze si tvar oněch křivek snadno představiti, vyslovil[1]) a dokázal[2]) G. H. Halphen. Jeho důkaz spočívá v tom: rovnice projekce libovolné geodetické křivky na centrální ploše rotační druhého stupně do roviny rovníku jsou formálně shodné s rovnicemi *herpolhodie,* t. j. křivky, jež vznikne kotálením plochy druhého stupně o pevném středu po rovině. [3]). Tato formální shoda vede k reálnému výsledku jen u geodetických křivek protáhlého ellipsoidu; jejich projekci lze pokládati za herpolhodii v tom speciálním případě, kdy kotálející se plocha přejde v ellipsu.

Při pokusu provésti důkaz Halphenovy věty nezávisle na složitějším problému herpolhodie shledal jsem, že výpočet vedoucí při ellipsoidu protáhlém k větě právě zmíněné lze

---

[1]) Comptes rendus etc. CV. p. 535—536; uvedeno bez důkazu.

[2]) Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, II. díl, str. 249 - 250.

[3]) K této křivce se dospívá při studiu pohybů Poinsotových, v. Halphen, Traité II, kap. II.

beze změny applikovati i na případ ellipsoidu *sploštělého*; interpretace výsledku pro tento případ vede k větě, jež je stejně jednoduchá a zajímavá jako věta Halphenova.

Zároveň se ukáže, že tohoto výpočtu lze užíti nejen pro projekce geodetických křivek, nýbrž i pro tyto křivky samy, čímž se dospěje k větám, jež ukazují, jak lze kotálením vytvořiti geodetické křivky na rotačním ellipsoidu, buď sploštělém nebo protáhlém.

I. Projekce geodetických křivek.

Rovnice rotační plochy druhého stupně budiž dána ve tvaru

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1 - \frac{z^2}{b^2}. \tag{1}$$

Souřadnice bodu geodetické křivky lze vyjádřiti parametricky užitím elliptických funkcí. Pro souřadnici z platí

$$z^2 = \tau^2 (e_\beta - pu), \tag{2}$$

kde τ je konstanta úměrnosti; e_α, e_β, e_γ je známé označení pro hodnoty $p(\omega_\alpha)$, $p(\omega_\beta)$, $p(\omega_\gamma)$, t. j. pro kořeny rovnice

$$p'^2 u = 0.$$

Element oblouku je určen rovnicí

$$\frac{ds}{du} = \tau \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} (e_\alpha - pu). \tag{3}$$

Kořeny e_α, e_β, e_γ souvisí s rozměry plochy druhého stupně relacemi

$$\left.\begin{aligned} \tau^2 (e_\alpha - e_\beta) &= \frac{b^4}{a^2 - b^2} \\ \tau^2 (e_\beta - e_\gamma) &= \frac{a^2 - c^2}{a^2} b^2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

kde c je první integrační konstanta, k níž se dospěje při integraci differenciálních rovnic geodetiky[4]). Pro oba ellipsoidy má c jednoduchý geometrický význam: každá geodetika dotýká se totiž dvou rovnoběžek souměrně položených dle rovníku; c je

[4]) Vzorce (2) až (4) nalezne čtenář v Halphen, Traité II, str. 239. Označení užil jsem stejného.

poloměr těchto rovnoběžek[5]). Geodetika vine se v nekonečně mnoha vlnách v pásu plošném, omezeném oběma rovnoběžkami.

Označme s_1 oblouk průmětu geodetiky na rovinu rovníku; platí pak

$$ds_1^2 = ds^2 - dz^2 \tag{5}$$

Z rovnice (2) plyne differencováním

$$dz = -\tau^2 \frac{p'u}{2z}\, du = -\tau^2 \frac{p'u}{2\sqrt{e_\beta - pu}}\, du.$$

Užijeme-li základní rovnice

$$p'^2 u = 4\,(pu - e_\alpha)\,(pu - e_\beta)\,(pu - e_\gamma),$$

obdržíme

$$dz^2 = -\tau^2 (pu - e_\alpha)\,(pu - e_\gamma)\, du^2;$$

dosazením do rovnice (5) a užitím rovnice (3) vyjádříme element oblouku průmětu ve tvaru

$$ds_1 = \tau\, du \sqrt{\frac{e^2}{b^2}(e_\alpha - pu)^2 + \tau^2 (pu - e_\alpha)\,(pu - e_\gamma)} \tag{6}$$

kde $e^2 = a^2 - b^2$.

Pišme na okamžik

$$pu = \xi,$$

pak

$$du = -\tfrac{1}{2} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - e_\alpha)\,\xi - e_\beta)\,(\xi - e_\gamma)}}.$$

Dosadíme-li za pu a du do rovnice (6), obdržíme po jednoduché úpravě

$$ds_1 = -\frac{\tau}{2} \cdot \frac{a}{b}\, d\xi \sqrt{\xi - \frac{1}{a^2}(e^2 e_\alpha + b^2 e_\gamma)} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\xi - e_\beta)(\xi - e_\gamma)}} \tag{7}$$

Proveďme substituci

$$\xi = \xi_1 + m \tag{8}$$

a určeme m tak, aby platilo

$$\frac{1}{a^2}(e^2 e_\alpha + b^2 e_\gamma) - m + e_\beta - m + e_\gamma - m = 0,$$

[5]) Traité II, str. 246. Poslední část věty v textu vyslovené není u Halphena výslovně uvedena, plyne však z úvah na str. 245 a také 248.

což vyžaduje

$$m = \frac{b^2}{3a^2}(e_\gamma - e_\alpha).$$

Zaveďme pak označení

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{a^2}(e^2 e_\alpha + b^2 e_\gamma) - m = \frac{1}{3a^2}[e_\alpha(3a^2 - 2b^2) + 2b^2 e_\gamma].\\
\varepsilon_\beta &= e_\beta - m \qquad = -\frac{1}{3a^2}[e_\alpha(3a^2 - b^2) + \\
&\qquad\qquad + e_\gamma(3a^2 + b^2)]\\
\varepsilon_\gamma &= e_\gamma - m \qquad = \frac{1}{3a^2}[b^2 e_\alpha + e_\gamma(3a^2 - b^2)]
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

tak že platí

$$\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma = 0. \tag{10}$$

Užitím substituce (8) a zavedením veličin ε_α, ε_β, ε_γ uvede se ds_1 na tvar

$$ds_1 = -\frac{\tau}{2} \cdot \frac{a}{b} \cdot d\xi_1 \sqrt{\frac{\xi_1 - \varepsilon_\alpha}{(\xi_1 - \varepsilon_\beta)(\xi_1 - \varepsilon_\gamma)}}$$

což lze přepsati

$$ds_1 = -\frac{a}{b}\tau \frac{\xi_1\, d\xi_1 - \varepsilon_\alpha d\xi_1}{2\sqrt{(\xi_1 - \varepsilon_\alpha)(\xi_1 - \varepsilon_\beta)(\xi_1 - \varepsilon_\gamma)}}. \tag{11}$$

Položíme

$$v = \tfrac{1}{2}\int_{\xi_1}^{\infty} \frac{d\xi_1}{\sqrt{(\xi_1 - \varepsilon_\alpha)(\xi_1 - \varepsilon_\beta)(\xi_1 - \varepsilon_\gamma)}}; \tag{12}$$

ježto veličiny ε_α, ε_β, ε_γ hoví rovnici (10), je

$$\xi_1 = p_1 v, \tag{13}$$

kde funkce $p_1 v$ má ovšem jiné invarianty než funkce pu původně uvažovaná.

Obě elliptické funkce spolu souvisí — dle rovnice (8) — vztahem

$$p_1 v = pu + \frac{b^2}{3a^2}(e_\alpha - e_\gamma). \tag{14}$$

Z rovnice (12) plyne

$$dv = -\frac{d\xi_1}{2\sqrt{(\xi_1 - \varepsilon_\alpha)(\xi_1 - \varepsilon_\beta)(\xi_1 - \varepsilon_\gamma)}};$$

užitím toho a vztahu (13) přeměníme (11) na vzorec

$$ds_1 = \frac{a}{b}\,\tau(p_1 v - \varepsilon_\alpha)\,dv, \tag{15}$$

jenž tvoří základ dalších úvah.

Na výraz s tímto formálně totožný lze uvésti element oblouku ellipsy[6]. Buďtež

$$x = a' \cos\varphi, \quad y = b' \sin\varphi \tag{16}$$

rovnice ellipsy, ϱ průvodič, tak že

$$\varrho^2 = b'^2 + (a'^2 - b'^2)\cos^2\varphi. \tag{17}$$

Označíme-li s_2 oblouk ellipsy, je

$$ds_2 = d\varphi\sqrt{a'^2 - (a'^2 - b'^2)\cos^2\varphi}.$$

Určíme-li $d\varphi$, $\cos^2\varphi$ z rovnice (17) na základě ϱ, obdržíme

$$ds_2 = -\frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{(a'^2 - \varrho^2)(\varrho^2 - b'^2)}}\sqrt{a'^2 + b'^2 - \varrho^2}. \tag{18}$$

Zavedeme

$$\varrho^2 = \mu\bar{\xi}_1 + n \tag{19}$$

tak že

$$\varrho d\varrho = \tfrac{1}{2}\mu d\bar{\xi}_1,$$

a určíme n tak, aby platilo

$$a'^2 + b'^2 - n + a'^2 - n + b'^2 - n = 0,$$

což vyžaduje

$$n = \tfrac{2}{3}(a'^2 + b'^2).$$

Zaveďme označení

$$\left.\begin{aligned} \mu\bar{\varepsilon}_\alpha &= a'^2 + b'^2 - n = \frac{a'^2 + b'^2}{3} \\ \mu\bar{\varepsilon}_\beta &= a'^2 - n \qquad\quad = \frac{a'^2 - 2b'^2}{3} \\ \mu\bar{\varepsilon}_\gamma &= b'^2 - n \qquad\quad = \frac{b'^2 - 2a'^2}{3} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

---

[6]) To plyne ihned z rovnice (3), neboť mezi geodetikami jsou také meridiány, jež jsou ellipsami. V. Traité II, str. 271.

Tím vším uvedeme ds_2 na tvar

$$ds_2 = -\sqrt{\mu}\frac{\overline{\xi}_1 d\overline{\xi}_1 - \overline{\varepsilon}_\alpha d\overline{\xi}_1}{2\sqrt{(\overline{\xi}_1 - \overline{\varepsilon}_\alpha)(\overline{\xi}_1 - \overline{\varepsilon}_\beta)(\overline{\xi}_1 - \overline{\varepsilon}_\gamma)}}. \tag{21}$$

Položíme nyní opět

$$v = \tfrac{1}{2}\int_{\overline{\xi}_1}^{\infty}\frac{d\overline{\xi}_1}{\sqrt{(\overline{\xi}_1 - \overline{\varepsilon}_\alpha)(\overline{\xi}_1 - \overline{\varepsilon}_\beta)(\overline{\xi}_1 - \overline{\varepsilon}_\gamma)}};$$

odtud plyne jednak

$$dv = -\tfrac{1}{2}\frac{d\overline{\xi}_1}{\sqrt{(\overline{\xi}_1 - \overline{\varepsilon}_\alpha)(\overline{\xi}_1 - \overline{\varepsilon}_\beta)(\overline{\xi}_1 - \overline{\varepsilon}_\gamma)}},$$

jednak — ježto platí zřejmě $\overline{\varepsilon}_\alpha + \overline{\varepsilon}_\beta + \overline{\varepsilon}_\gamma = 0$ —

$$\overline{\xi}_1 = \overline{p}_1 v;$$

invarianty funkce $\overline{p}_1$ závisí ovšem na $\overline{\varepsilon}_\alpha$, $\overline{\varepsilon}_\beta$, $\overline{\varepsilon}_\gamma$. Dosadíme-li do (21) za $\overline{\xi}_1$, obdržíme konečně:

$$ds_2 = \sqrt{\mu}\,.\,(\overline{p}_1 v - \overline{\varepsilon}_\alpha)\,dv, \tag{22}$$

což je výraz téhož tvaru jako (15).

Mají-li oba výrazy (15) a (22) býti sobě rovny pro každé v, musí

$$\sqrt{\mu} = \frac{a}{b}\tau, \text{ t. j. } \mu = \frac{a^2}{b^2}\tau^2;$$

obě funkce $p_1 v$ a $\overline{p}_1 v$ musí býti totožné, což vyžaduje rovnost invariantů; konečně musí

$$\varepsilon_\alpha = \overline{\varepsilon}_\alpha. \tag{23}$$

Z toho a z rovnosti invariantů pak plyne

$$\varepsilon_\beta = \overline{\varepsilon}_\beta, \quad \varepsilon_\gamma = \overline{\varepsilon}_\gamma, \tag{24}$$

anebo — což ostatně vede k týmž výsledkům —

$$\varepsilon_\beta = \overline{\varepsilon}_\gamma, \quad \varepsilon_\gamma = \overline{\varepsilon}_\beta.$$

Z rovnic (23) a (24) lze určiti poloosy a', b' ellipsy, jež má stejný element oblouku s projekcí geodetiky.

Dosadíme-li totiž z rovnic (20) a zároveň užijeme hodnoty nalezené pro μ, obdržíme z rovnice (23) a z prvé z rovnic (24):

$$\frac{a'^2 + b'^2}{3a^2\tau^2}\,b^2 = \varepsilon_\alpha$$

$$\frac{a'^2 - 2b'^2}{3a^2\tau^2}\,b^2 = \varepsilon_\beta.$$

Z těchto dvou rovnic obdržíme odečtením

$$b'^2 \,.\, \frac{b^2}{a^2\tau^2} = \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta; \tag{25}$$

přičteme-li druhou k dvojnásobné prvé, obdržíme podobně

$$a'^2 \,.\, \frac{b^2}{a^2\tau^2} = 2\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = \varepsilon_\alpha + (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) = \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma. \tag{26}$$

Za ε_α atd. dosadíme výrazy (9). Jednoduchou úpravou, při níž pamatujeme, že

$$e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0,$$

obdržíme

$$\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta = \frac{1}{a^2}\left[a^2(e_\alpha - e_\beta) - b^2(e_\alpha - e_\gamma)\right].$$

Výraz pro $e_\alpha - e_\beta$ známe z prvé rovnice (4); výraz pro $e_\alpha - e_\gamma$ obdržíme odečtením obou rovnic (4):

$$e_\alpha - e_\gamma = \frac{b^2}{\tau^2 a^2(a^2 - b^2)}(a^4 - a^2c^2 + b^2c^2).$$

Dosadíme-li tyto výrazy, obdržíme

$$\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta = \frac{b^4c^2}{\tau^2 a^4}$$

a z rovnice (25):

$$b'^2 = \frac{b^2c^2}{a^2} \tag{27}$$

Podobnou úpravou obdržíme z rovnice (26):

$$a'^2 = \frac{b^2c^2}{a^2} + a^2 - c^2. \tag{28}$$

Lze tedy určiti ellipsu, mající totožný element oblouku s projekcí geodetiky; její poloosy jsou dány vzorci (27) a (28). *Tato ellipsa je reálná jen v případě, že rotační plocha (1) je* *ellipsoid, sploštělý nebo protáhlý.* Neboť pro oba ellipsoidy platí $a^2 > 0$, $b^2 > 0$, je tedy $b'^2 > 0$, ježto $c^2 > 0$, dle svého významu. Mimo to $a > c$, ježto c, poloměr rovnoběžky, je menší než a, poloměr rovníku. I je také $a'^2 > 0$. Pro ostatní rotační plochy je buď a^2 neb b^2 záporné, tedy $b'^2 < 0$, ellipsa nikoliv reálná.

Označme průvodič projekce geodetiky r; dle rovnice (1) je

$$r^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - z^2).$$

Užitím rovnice (2) obdržíme odtud

$$r^2 = \frac{a^2}{b^2}[b^2 - \tau^2(e_\beta - pu)].$$

Místo pu zaveďme funkci $p_1 v$ z rovnice (14):

$$r^2 = \frac{a^2\tau^2}{b^2} p_1 v - \frac{a^2}{b^2}\tau^2 e_\beta - \frac{\tau^2}{3}(e_\alpha - e_\gamma) + a^2.$$

Výraz pro $e_\alpha - e_\gamma$ již známe; pro e_β obdržíme odečtením obou rovnic (4), pamatujeme-li, že $e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0$, výraz

$$e_\beta = \frac{b^2}{3a^2\tau^2(a^2 - b^2)}(a^4 - 2a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2).$$

Dosadíme-li to vše do výrazu pro r^2, obdržíme

$$r^2 = \frac{a^2\tau^2}{b^2} p_1 v + \frac{2a^4 + c^2(a^2 + b^2)}{3a^2} \tag{29}$$

Vyjádříme také ϱ, průvodič ellipsy, jejíž osy jsou dány vzorci (27) a (28), funkcí $p_1 v$.

Z rovnice (19) obdržíme, dosadíme-li tam $\overline{p_1 v} = p_1 v$ za $\overline{\xi_1}$, a také příslušný výraz za μ a n:

$$\varrho^2 = \frac{a^2\tau^2}{b^2} p_1 v + \tfrac{2}{3}(a'^2 + b'^2).$$

Dosadíme-li sem ze vzorců (27) a (28), obdržíme

$$\varrho^2 = \frac{a^2}{b^2}\tau^2 p_1 v + \frac{4b^2c^2 + 2a^4 - 2a^2c^2}{3a^2}. \tag{30}$$

Z rovnic (29) a (30) pak plyne

$$\varrho^2 - r^2 = \frac{c^2}{a^2}(b^2 - a^2). \tag{31}$$

Připomeneme-li si, že z rovnosti

$$ds_1 = ds_2,$$

které jsme docílili ztotožněním výrazů (15) a (22), plyne při vhodné volbě integrační konstanty

$$s_1 = s_2;$$

můžeme dosavadní výsledky interpretovati takto:

K dané geodetice na ellipsoidu rotačním určeme ellipsu dle vztahů (27) a (28). Na průmětu geodetiky do roviny rovníku zvolme libovolný bod M; je-li jeho průvodič r, určeme na ellipse bod M', jehož průvodič ϱ hoví rovnici (31). Od bodu M nanesme na projekci geodetiky oblouk s_1 libovolné délky v libovolném smyslu, který pokládáme za kladný, tak že obdržíme bod M_1; naneseme-li na ellipsu od bodu M' oblouk $s_2 = s_1$ ve vhodně voleném smyslu, který pokládáme za kladný, obdržíme bod M_1', jehož průvodič ϱ_1 souvisí s průvodičem r_1 bodu M_1 zase rovnicí (31). Jinými slovy: přiložíme-li ellipsu k průmětu geodetiky tak, aby se dotýkaly v bodech M a M', a aby obě tečny v těchto bodech splývaly i co do smyslu (právě voleného), pak, kotálí-li se ellipsa po projekci geodetiky jakýmkoli způsobem, je rozdíl průvodičů bodů, v nichž se dotýkají, stálý.

Z toho plyne:

I. Pro ellipsoid protáhlý je $b^2 > a^2$, t. j. $\varrho^2 - r^2 > 0$, $\varrho^2 = r^2 + k^2$, kde k^2 je veličina kladná. Je pak zřejmo, že naše ellipsa, je-li její střed pevně umístěn ve vzdálenosti k od středu ellipsoidu kolmo k rovině rovníku, kotálením vytvoří projekci geodetiky, neboť pak skutečně je stále vyplněn vztah (31). To je věta Halphenova.

II. Pro ellipsoid sploštělý je $a^2 > b^2$, t. j. $r^2 - \varrho^2 > 0$, tedy $r^2 = \varrho^2 + k^2$, kde k^2 je veličina kladná. I lze z délek r, ϱ, k zase sestrojiti pravoúhlý trojúhelník, s tím rozdílem, že v tomto případě je r jeho přeponou. *I vznikne průmět geodetiky sploštělého ellipsoidu na rovinu rovníku kotálením ellipsy, jejíž střed má od středu ellipsoidu stálou vzdálenost, měřenou kolmo k rovině ellipsy.* Jestliže tedy do středu elliptické desky zabodneme kolmo tyčinku délky k a kotálíme ellipsu tak, že volný konec tyčinky stále spočívá ve středu ellipsoidu, vytvoří obvod desky projekci geodetiky. Jinak lze si věc představiti takto: přímý kužel elliptický o výšce k, jehož vrchol tkví ve středu ellipsoidu, kotálí se po rovině rovníku; tím se jeho plášť rozvíjí do roviny a ellipsa, jeho řídící křivka, do projekce geodetiky. — Rozměry ellipsy jsou dány rovnicemi (27) a (28), výška k rovnicí (31).

Věty právě dokázané ukazují, jaký je tvar obou projekcí geodetik. Tyto křivky probíhají v nekonečně mnoha shodných elliptických závitech mezi dvěma kružnicemi soustřednými (o poloměrech a, c), jichž se každý závit dvakráte dotkne. Při ellipsoidu protáhlém oba konce téhož závitu přes sebe přesahují, při ellipsoidu sploštělém k sobě nedosahují, tak že závit je otevřen.

II. Geodetické křivky.

K oběma předchozím větám dospěli jsme na základě shody mezi výrazy pro element oblouku projekce geodetiky a ellipsy. Ale tentýž tvar má výraz pro element oblouku geodetické čáry samé; i lze určiti ellipsu, jejíž oblouk je roven pro každou hodnotu příslušného parametru oblouku geodetické křivky. Běží tedy o to, uvésti ve shodu výraz

$$ds = \tau \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}(e_\alpha - pu) \tag{3}$$

a výraz (22), který lze psáti

$$ds_2 = \sqrt{\mu}\,(\bar{\varepsilon}_\alpha - \bar{p}_1 v)\,dv, \tag{32}$$

jestliže znaménko minus si myslíme psáno při odmocnině $\sqrt{\mu}$. Aby nastala shoda, je zase třeba (a stačí), aby

$$\mu = \tau^2 \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad \bar{\varepsilon}_\alpha = e_\alpha, \quad \bar{\varepsilon}_\beta = e_\beta, \quad \bar{\varepsilon}_\gamma = e_\gamma$$

a ovšem je u i v pak argument týž.

Výpočtem obdobným dřívějšímu obdržíme

$$\left.\begin{aligned} a'^2 &= \frac{b^2c^2}{a^2} + a^2 - c^2 \\ b' &= b \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Je zase zřejmo, že ellipsa je pro oba ellipsoidy reálná

Určíme průvodiče r, ϱ pro geodetiku a ellipsu. Užitím rovnice (1) a (2) obdržíme

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - \frac{z^2}{b^2}(a^2 - b^2) =$$

$$= a^2 - \frac{a^2 - b^2}{b^2}\,\tau^2(e_\beta - pu).$$

Dosadíme za e_β výraz nahoře nalezený a upravíme na tvar

$$r^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}\,\tau^2 pu + \frac{1}{3a^2}(2a^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2) \tag{34}$$

Pro průvodič ellipsy obdržíme jako dříve

$$\varrho^2 = \mu pu + \tfrac{2}{3}(a'^2 + b'^2),$$

a dosadíme-li sem za μ, a', b', po krátké úpravě

$$\varrho^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}\,\tau^2 pu + \frac{1}{3a^2}(2a^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2) \tag{35}$$

Z rovnic (35) a (34) pak plyne

$$\varrho^2 - r^2 = \frac{c^2}{a^2}(b^2 - a^2). \tag{36}$$

Dospěli jsme tedy k výsledkům zcela obdobným, jako pro projekce geodetiky. I můžeme hned vysloviti věty:

III. *Geodetická čára na sploštělém ellipsoidu vznikne kotálením ellipsy po ellipsoidu. Střed této ellipsy má od středu ellipsoidu pevnou vzdálenost, měřenou kolmo k rovině ellipsy.* Jinak a názorněji: *přímý kužel elliptický, jehož vrchol tkví ve středu ellipsoidu, kotálí se po ellipsoidu; jeho řídící křivka se při tom rozvíjí do geodetiky.* Je však zřejmo, že lze také nejprve vytvořiti rovinnou křivku kotálením ellipsy — jako v případě projekce geodetiky dle věty II., — střed této křivky umístiti ve středu ellipsoidy a kotáleti ji po ellipsoidu; tak vznikne geodetika.

IV. Pro ellipsoid protáhlý přímý vznik kotálením ellipsy po ploše je málo názorný (střed ellipsy má stálou — nikoliv kolmou — vzdálenost od středu plochy, její průvodič je stále přeponou pravoúhlého trojúhelníku, jenž se pohybuje zároveň s ellipsou). Lépe je představiti si — jako v případě III. — že se vytvoří rovinná křivka kotálením ellipsy, jako pro projekci geodetiky (případ I.), střed této křivky se umístí ve středu plochy a křivka kotálením po ellipsoidu vytvoří geodetiku.

Kužel, o němž je řeč ve větě III., protne ellipsoid ještě v jedné křivce; je zřejmo, že je to také geodetika ellipsoidu, s prvou shodná, mající tedy totéž c.

Jak lze od ne-euklidické geometrie dospěti k II. zák. Keplerovu a principu relativnosti.

Prof. Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

Po objevení principu relativnosti nastává úkol vyrovnati mezi tímto jednoduchým věděním a naším taktéž velmi jednoduchým a harmonickým věděním o gravitaci.

Zákon Newtonův jest přirozeným shrnutím a rozšířením tří zákonů Keplerových. Od nich, přes myšlenky Newtonovy vede cesta ku vzorcům klassické mechaniky, která, jak známo, úplně s principem relativnosti se nesrovnává. Klassická mechanika udává vzorce hodící se pro rychlosti velmi malé vůči rychlosti světla; nová mechanika chce toto omezení odložiti. Bude tedy nutno buď na zákonech Keplerových neb na myšlenkách Newtonových něco změniti či doplniti, aby se principu relativnosti vyhovělo.

Přirozeným východiskem pro takovou práci jest rozbor zákonů Keplerových, rozbor popisu relativního pohybu planety vůči slunci. Aby pak práce tato nestala se příliš rozvláčnou, věnuji toto malé pojednání t. zv. druhému zákonu Keplerovu, jenž praví: *Tělesa nebeská pohybují se kol slunce v kuželosečkách, v jichž společném ohnisku se nalézá slunce.* *) — Zákon ten považuji totiž za vlastní základnu našich názorů o gravitaci a tedy celé klassické mechaniky vůbec.

Pro účely naše třeba si uvědomiti, že pozorování pohybu země kol slunce koná se pomocí světla, jež se šíří konečnou

---

*) Formulace Strouhalova. Viz Mechaniku, vyd. 2. z r. 1910, str. 372.