Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

O zvláštních křivkách třetího stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 361--371

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122924`

Roztok víc než	Koncentr. v 1000 g v.	Spec. hm. při 20°	Speč. hm. roztoků vyss.	Odpovídající koncentrace	τ'	M	Molekul. snížení
$\frac{1}{128}$ n.	2,224	0,9998	1,0006	2,990	0,008	(695,27)	(0,722)
$\frac{1}{64}$ n.	4,234	1,0019	1,0028	5,327	0,017	582,92	0,861
$\frac{1}{32}$ n.	8,487	1,0054	1,0060	9,129	0,049	346,52	1,449
$\frac{1}{16}$ n.	17,272	1,0134	1,0137	17,592	0,100	327,17	1,534

Zde tedy zcela opačně než u zředěných roztoků kryoskopické methody $CaCl_2$ molek. váha klesá a sice blízko k hodnotám, od nichž Kahlenberg počíná ebullioskopickou methodu. Toto měření bude vyžadovat — vedle kontroly — doplnění ve směru koncentrovanějších roztoků, jakož i opakování methody ebullioskopické. Vedle solí uvedených bude nejprve proměřen naznačeným způsobem chlorid měďnatý.

O zvláštních křivkách třetího stupně.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

1. Projektivní geometrie křivek třetího stupně*) zabývala se od prvních počátků a zabývá se i dnes téměř výhradně „obecnými“ vlastnostmi, které jsou společny všem křivkám 3. st.; vzorem zde byla projektivní geometrie kuželoseček, kde se vlastně o jiné vlastnosti než o „obecné“ nejedná.

Zvláštní pozornosti zasluhuje však jistě to, čím se nejpodstatněji liší projektivní theorie křivek 3. st. od theorie kuželoseček. Každá křivka 3. st. má totiž projektivní vlastnosti, které bych na rozdíl od vlastností dříve zmíněných nazval „individuálními“, totiž ty, jež závisí na numerické hodnotě absolutního invariantu. O těchto individuálních projektivních vlastnostech není známo téměř nic mimo několik ojedinělých vět o křivce harmonické a ekvianharmonické.

*) Míním vždy křivky 3. st. bez dvojného bodu.

Podnět k následující práci dala mi jedna taková věta, která pochází od *Salmona* a zní:

Je-li H harmonická křivka třetího stupně a H_1 její Hessiana, jest H Hessianou křivky H_1 *). Označme obecně symbolem H_{k+1} Hessianu křivky H_k; křivky H_{k+1}, H_{k+2}, $H_{k+3}\dots$ (*„postupné Hessiany“*) nazveme první, druhou, třetí... Hessianou křivky H_k.

Generalisaci Salmonovy věty budeme hledati v odpovědi na otázku: *Jest nějaká křivka H_0 taková, že jest identická se svou n-tou Hessianou?*

Za supposice, že taková křivka existuje, máme řadu n křivek 3. stupně

$$H_0,\ H_1,\ H_2\ \dots\ H_{n-1} \qquad (1)$$
$$(H_n \equiv H_0)$$

kterou nazveme *cyklus n-tého řádu.*

Jsou-li všechny křivky (1) různé, jest *cyklus jednoduchý.* Kdyby $H_k \equiv H_l$, musí býti patrně i m-té Hessiany křivek H_k a H_l identické a seznáme snadno, že řada křivek (1) jest utvořena periodickým opakováním jisté skupiny d křivek, kde d jest nějaký dělitel čísla n. V takovém případě máme *cyklus složený* n-tého řádu; jest to vlastně $\frac{n}{d}$ shodných cyklů řádu d.

Sestrojíme-li k libovolně zvolené křivce H_0 „postupné Hessiany“ H_1, H_2, H_3 ..., nebude obecně žádná z nich totožná s původní křivkou H_0. Cyklus n-tého řádu obdržíme jen tenkrát, bude-li absolutní invariant křivky H_0 vyhovovati jisté podmínce. Vyhledání této podmínky bude naší hlavní úlohou.

2. Rovnici původní křivky H_0 předpokládáme redukovanou na známý kanonický tvar:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz = 0, \qquad (2)$$

kde x, y, z jsou homogenní souřadnice; mění-li se parametr m, tvoří příslušné křivky syzygetický svazek.

Z obou (relativních) invariantů křivky

$$S = m(1 - m^3),\ T = 1 - 20m^3 - 8m^6 \text{ **)}$$

*) *Salmon-Fiedler*: Analyt. Geom d. höheren ebenen Curven. 2. Aufl. 1882. Art. 226.

**) Viz *Salmon* l. c. art. 226.

utvoříme absolutní invariant

$$r = \frac{1}{48}\frac{T^2}{S^3},\ ^{*)} \tag{3}$$

který souvisí s parametrem m rovnicí

$$48r \,.\, m^3(1 - m^3)^3 - (1 - 20\,m^3 - 8\,m^6)^2 = 0. \tag{4}$$

Aby dvě křivky 3. stupně byly projektivně ekvivalentní, jest, jak známo, nutno a stačí, aby měly stejné absolutní invarianty.

Rovnice (4) jest v m 12. stupně; dosadíme-li

$$m^3 = \lambda,$$

obdržíme rovnici 4. stupně pro λ. Je-li λ jeden kořen této nové rovnice, jsou ostatní tři kořeny dány vzorcem

$$\left(\frac{1 - \sqrt[3]{\lambda}}{1 + 2\sqrt[3]{\lambda}}\right), \tag{5}$$

kde jest vzíti postupně všechny determinace odmocniny $\sqrt[3]{\lambda}$. Rovnice (4) má tedy obecně kořeny různé; v syzygetickém svazku jest dvanáct křivek, jež mají daný invariant r. Výjimky jsou, jak známo, jen pro tři specielní hodnoty absolutního invariantu:

1. Když $r = 0$, jest $T = 0$; rovnice (4) má jen 6 různých kořenů (6 křivek harmonických).

2. Když $r = \infty$, jest $S = 0$; rovnice (4) má jen 4 různé kořeny (4 křivky ekvianharmonické).

3. Když $3r + 4 = 0$, jest diskriminant křivky *)

$$T^2 + 64S^3 = (1 + 8m^3)^3 = 0;$$

rovnice (4) má jen 3 různé kořeny, k nimž však nutno připojiti $m = \infty$ (4 křivky rozpadávající se v trojúhelníky).

Vzorec (5) ukazuje mimo to, že pro libovolnou reální hodnotu invariantu r jsou 2 kořeny rovnice (4) reální a 10 imaginárních, kdežto pro r imaginární jsou všechny kořeny imaginární.

---

*) Numerický faktor jest tak volen, aby rovnice (11*b*) a (13) byly pokud možno jednoduché.

**) Viz *Salmon* l. c. art. 225.

3. Symbolem H_k budu nyní označovati *formu* třetího stupně, která položena $= 0$ dává rovnici příslušné křivky. Dle známé theorie jest

$$H_{k+1} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H_k}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 H_k}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 H_k}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 H_k}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 H_k}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 H_k}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 H_k}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial^2 H_k}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial^2 H_k}{\partial z^2} \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$(k = 0, 1, 2, 3 \ldots).$$

Podmínka, aby křivka H_0 byla totožná se svou n-tou Hessianou — srv. (1) — znamená, že formy H_0 a H_n mohou se lišiti toliko faktorem neobsahujícím proměnné x, y, z. Nazveme-li levou stranu rovnice (2) H_0, bude dle (6):

$$H_1 = - m^2 (x^3 + y^3 + z^3) + (2m^3 + 1)\, xyz.$$

Podmínka, aby křivka (2) byla totožná s první Hessianou, jest tedy

$$8m^3 + 1 = 0,$$

nebo též $m = \infty$. Dle odst. 2. vyhovují této podmínce toliko čtyři křivky syzygetického svazku, rozpadající se na trojúhelníky.

Tak jsme určili všechny *cykly 1. řádu*; v následujícím vždy předpokládáme, že první Hessiana není totožná s původní křivkou.

Poznamenávám ještě, že vyhledávajíce cykly libovolného řádu můžeme předem vyloučiti křivky invariantu $r = \infty$. Neboť dle odst. 2. jest touto hodnotou charakterisována křivka ekvianharmonická, jejíž postupné Hessiany jsou shodné trojúhelníky; ekvianharmonická křivka nemůže tedy býti členem žádného cyklu.

4. Dle Salmona*) jest mezi formami H_k, H_{k+1} a H_{k+2} vztah

$$108 H_{k+2} = 4 S_k^3 \,.\, H_k + T_k \,.\, H_{k+1}. \tag{7}$$

S_k a T_k jsou invarianty formy H_k.

*) U Salmona l. c. art. 226. jest na levé straně příslušné rovnice vynechán faktor 216.

Dosazujeme-li do (7) za k postupně $0, 1, 2, \ldots (n-2)$, obdržíme $(n-1)$ rovnic, z kterých lze eliminovati $H_2, H_3, \ldots H_{n-1}$; výsledek eliminace jest rovnice

$$H_n = X_n \,.\, H + Y_n \,.\, H_1 \text{ *)}, \tag{8}$$

kde X_n a Y_n jsou polynomy v $S, T; S_1, T_1; \ldots S_{n-2}, T_{n-2}$. Ze vzorců **), které udávají invarianty S a T pro libovolnou křivku syzygetického svazku jako funkce parametru a invariantů křivky základní, vyplývá, že

$$S_{k+1} = -\frac{1}{6^4}(48S_k^3 + T_k^2),\quad T_{k+1} = -\frac{T_k}{2^3 \,.\, 3^6}(72S_k^3 + T_k^2).$$

Užijeme-li těchto vzorců pro $k = 0, 1, 2, \ldots n-3$, vidíme, že $S_1, T_1; S_2, T_2; \ldots S_{n-2}, T_{n-2}$ a tedy též X_n, Y_n jsou polynomy v S a T. Mimo to snadno se dokáže, že pro n liché jest Y_n homogenní v S^3 a T^2; pro n sudé platí totéž o podílu $Y_n : T$.

Podmínka, aby křivka H byla členem cyklu řádu n-tého, jest

$$Y_n = 0, \tag{9}$$

neboť pak jsou křivky

$$H = 0 \text{ a } H_n = 0$$

identické vzhledem k rovnici (8).

Dělíme-li levou stranu rovnice (9) vhodnou mocninou invariantu S (což jest možno, poněvadž $S = 0$ dává ekvianharmonickou křivku, která dle poznámky na konci 3. odst. nemůže býti řešením naší úlohy) a odloučíme-li, je-li n sudé, faktor T, redukuje se (9) na algebraickou rovnici pro absolutní invariant r, definovaný vzorcem (3); koefficienty té rovnice jsou celá čísla.

Podmínka, aby druhá Hessiana splývala s původní křivkou, jest dle (9):

$$Y_2 = T = 0.$$

Cykly 2. řádu jsou tedy utvořeny vždy křivkami harmonickými (srv. odst. 2.). Šest harmonických křivek syzygetického svazku dělí se na tři páry takové, že každý pár tvoří cyklus

---

*) Pro jednoduchost budu psáti H, S, T místo H_0, S_0, T_0.

**) Salmon l. c.

2. řádu (Salmonův theorem, o kterém jsem se na počátku zmínil *).

Opakuje-li se takový cyklus 2. řádu, lze utvořiti cyklus libovolného řádu sudého; harmonická křivka dává proto vždy řešení rovnice (9), je-li n sudé.

5. Buďtež (1) křivky tvořící jednoduchý cyklus n-tého řádu a

$$r_0, r_1, r_2 \ldots r_{n-1} \tag{10}$$

jejich absolutní invarianty.

Jsou-li mezi invarianty (10) dva stejné, můžeme předpokládati, že pro jistá čísla k a l platí

$$r_k = r_l, \quad k \leqq l,$$

kdežto

$$r_k \neq r_m, \quad k < m < l.$$

Za této supposice jsou nejenom křivky H_k a H_l projektivně ekvivalentní, nýbrž i jejich p-té Hessiany, takže

$$r_{k+p} = r_{l+p}$$

pro libovolné p. Z toho snadno usoudíme, že řada (10) jest utvořena periodickým opakováním jisté skupiny d různých invariantů, kde

$$d = l - k.$$

Tedy:

Číslo d musí býti dělitelem čísla n. Můžeme nalézti ještě další podmínku pro číslo d: Nechť jest H'_0 křivka invariantu r_0, která není obsažena v cyklu (1); vhodnou projektivní transformací křivek (1) dostaneme nový cyklus

$$H'_0, H'_1, H'_2 \ldots H'_{n-1}. \tag{1'}$$

Je-li H''_0 křivka invariantu r_0, která není obsažena ani v (1), ani v (1'), utvoříme podobně nový cyklus

$$H''_0, H''_1, H''_2 \ldots H''_{n-1} \tag{1''}$$

a tak pokračujeme dále, až jest každá z 12 křivek invariantu r_0 obsažena v jednom z cyklů (1), (1'), (1'') ...

*) Srv. též *Cremona-Weyr*: Úvod do geom. theorie křivek rovinných str. 163.

Poněvadž řada invariantů (10) je pro všechny tyto cykly stejná, vidíme, že *číslo d jest dělitelem čísla 12.*

6. Položme ještě následující otázku: Je-li r_0 kořen rovnice (9), jak určíme, kolik jest v řadě

$$r_0, r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$$

stejných invariantů?

K obecnému řešení této úlohy vede vzorec

$$r_{k+1} = -\frac{r_k (2r_k + 3)^2}{3 (r_k + 1)^3} = \Theta (r_k),$$

kterým jest vyjádřen vztah mezi invariantem r_k křivky a invariantem r_{k+1} její Hessiany; odvodíme jej snadno z formule pro H_1 udané v odst. 3.

Píšeme-li

$$\Theta (\Theta (r)) = \Theta^2 (r), \Theta (\Theta^2 (r)) = \Theta^3 (r), \ldots \Theta (\Theta^{n-1} (r)) = \Theta^n (r)$$

představuje rovnice

$$\Theta^k (r) - r = 0$$

podmínku, aby invariant k-té Hessiany byl totožný s invariantem původní křivky. Odstraníme-li v této rovnici zlomky, obdržíme na levé straně polynom, který nazveme $F_k (r)$.

Utvořme nyní mimo rovnici (9) rovnice

$$F_a (r) = 0, \quad F_b (r) = 0, \ldots, \tag{11}$$

kde $a, b \ldots$ jsou dělitele čísla n a ustanovme, které z polynomů $F_a (r), F_b (r) \ldots$ mají společnou míru s levou stranou rovnice (9). Dle odst. 5. stačí vzíti za $a, b \ldots$ jen ty dělitele d čísla n, které jsou zároveň děliteli čísla 12.

Mají-li rovnice

$$F_a = 0 \text{ a } Y_n = 0$$

společný kořen r_0, jest příslušná křivka H_0 členem cyklu n-tého řádu a v řadě (10) vyskytuje se pak jistá skupina a různých invariantů $\frac{n}{a}$-kráte.

7. Tím jest vše dáno, čeho jest třeba k odpovědi na otázku, kolik křivek syzygetického svazku vede k cyklu n-tého řádu a jaké jsou projektivní vztahy mezi jednotlivými křivkami cyklu.

Algebraický charakter rovnice (9) určíme snadno z jejího geometrického významu.

Uvažme jen, že každá z n křivek (1) splývá se svou n-tou Hessianou. Rovnici (9) vyhovují tudíž všechny invarianty (10); je-li jeden z nich r, jsou ostatní

$$\Theta(r),\ \Theta_1(r),\ \Theta_2(r)\ \ldots\ \Theta_{n-1}(r).$$

Rovnice (9) jest tedy z těch rovnic, kterými se *Abel* poprvé soustavně zabýval a které jsou, zkrátka řečeno, invariantní vzhledem k jisté racionální substituci. —

Pro veliké hodnoty n byly by výpočty polynomů Y_n a F_a velmi složité; uvedu toliko výsledky, týkající se cyklů řádu třetího a čtvrtého.

Z rovnic (11) budu potřebovati pouze dvě následující, které byly sestrojeny výpočtem naznačeným v odst. 6.:

$$F_1(r) \equiv r\,.\,(3r+4)\,.\,(r^2+3r+3) = 0 \qquad (11a)$$

a

$$F_2(r) \equiv F_1(r)\,.\,G(r) = 0, \qquad (11b)$$

kde

$$G(r) = r^6 + 6r^5 + 6r^4 + 9r^3 + 63r^2 + 108r + 54.$$

8. *Cykly 3. řádu.* Rovnice (9) zní pro $n = 3$:

$$r^2 + 3r + 3 = 0. \qquad (12)$$

Buďtež r' a r'' kořeny této rovnice. V žádném cyklu 3. řádu nemohou se vyskytovati oba invarianty r' a r'', neboť dle odst. 5. musí býti počet d různých invariantů v tomto případě dělitelem čísla 3. Mají tudíž všecky křivky cyklu buď invariant r' nebo všecky invariant r''. Všech 12 křivek invariantu r' (n. r'') dělí se na 4 cykly třetího řádu. Poněvadž jsou všecky členy cyklu n-tého řádu obecně reální nebo imaginární dle toho, je-li jeden z nich reální neb imaginární, usoudíme snadno z toho, co bylo na konci odst. 2. řečeno o realitě kořenů rovnice (4), že *všechny cykly 3. řádu jsou imaginární.*

Lineární faktory rovnice (11a) dávají křivku harmonickou a křivku degenerovanou na trojúhelník.

Srovnejme kvadratický faktor této rovnice s rovnicí (12); obdržíme větu: Je-li $n > 3$, nemohou míti křivky tvořící cyklus n-tého řádu všechny tentýž invariant r.

9. *Cykly 4. řádu.* Rovnice (9) zní pro $n = 4$, zbavena faktoru T, takto:

$$r^6 + 3r^5 - 33r^4 - 171r^3 - 297r^2 - 216r - 108 = 0. \quad (13)$$

Rovnice (13) jest reduktibilní. Důkaz:

Kdyby nějaký kořen rovnice (13) vedl k cyklu složenému, musil by ten cyklus býti složen buď z cyklů řádu 1. nebo z cyklů řádu 2.

Cyklus řádu 1. jest zde vyloučen, poněvadž jsme při tvoření rovnice (13) (obecně: rovnice (9); viz odst. 4.) předpokládali, že první Hessiana se liší od původní křivky.

Cyklus řádu 2. rovněž není možný, ježto rovnice (13) nemá kořen rovný nulle.

Každý kořen rovnice (13) vede tudíž *k jednoduchému* cyklu 4. řádu.

Není možno, aby existovaly 2 projektivně různé cykly 4. řádu utvořené osmi křivkami o invariantech vesměs různých, neboť by pak stupeň rovnice (13) musil býti aspoň $= 8$.

Poněvadž jest dle (13) jen šest různých invariantů, jsou vůbec možné jen dvě kombinace: buď jest jeden cyklus s křivkami o 4 různých invariantech a druhý pouze o 2 různých invariantech, anebo jsou tři cykly a v každém z nich jen 2 různé invarianty.

Tato poslední kombinace jest však vyloučena, poněvadž by pak levá strana rovnice (13) musila býti totožná s polynomem $G(r)$ (srv. odst. 6. a 7.).

Zbývá tedy jen první kombinace a soudíme, že levá strana rovnice (13) jest součin z faktorů bikvadratického a kvadratického. Tímto kvadratickým faktorem, jenž vede k cyklu 4. řádu o 2 různých invariantech, jest dělitelna levá strana rovnice (11*b*), resp. její faktor $G(r)$ (ježto $F_1(r)$ vede k cyklům 1., 2. a 3. řádu).

Nezbývá tedy než vyhledati největší společnou míru polynomu $G(r)$ s levou stranou rovnice (13), abychom obdrželi definitivní tvar rovnice pro jednoduché cykly 4. řádu:

$$(r^4 - 3r^3 + 21r^2 - 17r - 9) \, . \, (r^2 + 6r + 6) = 0 \quad (13a).$$

V syzygetickém svazku jsou dva různé druhy cyklů 4. řádu:

1. *12 projektivně ekvivalentních cyklů; křivky takového cyklu mají vesměs různé invarianty, jež jsou kořeny bikvadratického faktoru rovnice (13a).*

2. *6 projektivně ekvivalentních cyklů; křivky tvořící takový cyklus mají invarianty*

$$r_1,\ r_2,\ r_1,\ r_2,$$

kde r_1 a r_2 *značí kořeny kvadratického faktoru rovnice (13a).*

Dle odst. 2. jsou z prvních dvanácti cyklů jen 2 reální; jeden z nich je utvořen křivkami (2), pro něž přibližně

$$m = 0{\cdot}6\ \ldots,\ -0{\cdot}59\ \ldots,\ 0{\cdot}2\ \ldots,\ -2{\cdot}1\ \ldots,$$

pro křivky druhého jest pak

$$m = 0{\cdot}1\ \ldots,\ -8{\cdot}4\ \ldots,\ 2{\cdot}8\ \ldots,\ -0{\cdot}9\ \ldots$$

Z druhých šesti cyklů jest jen jeden reální; příslušné křivky mají parametry

$$m = -5{\cdot}4\ \ldots,\ 1{\cdot}8\ \ldots,\ -0{\cdot}6\ \ldots,\ -0{\cdot}1\ \ldots$$

10. Pan Dr. Boh. Bydžovský, jemuž jsem sdělil výsledky těchto studií o cyklech 3. a 4. řádu, vyslovil domněnku, že snad všechny cykly lichého řádu jsou složeny z křivek imaginárních.

Shledal jsem, že tato věta jest skutečně správná; následující poznámky o tvaru Hessiany nebudou snad bez zajímavosti.

Křivka svazku (2) má dle známé theorie ovál (t. j. reální tah bez inflexe), je-li

$$-\infty < m < -\tfrac{1}{2}; \tag{14}$$

není-li parametr m v těchto mezích, jest křivka bez oválu.

Dle formule pro H_1 uvedené v odst. 3. souvisí parametr m' Hessiany s parametrem m původní křivky vzorcem

$$m' = -\frac{2m^3+1}{6m^2}, \tag{15}$$

který ukazuje, že m' jest neb není v intervallu (14) dle toho, není-li neb je-li m v tomtéž intervallu. Tedy: ***Má-li reální křivka 3. stupně ovál, jest její Hessiana bez oválu; nemá-li původní křivka ovál, má jej Hessiana.***

Z toho následuje:

Z obou reálních harmonických křivek syzygetického svazku jedna má ovál, druhá jest bez oválu.

Cyklus postupných Hessian řádu lichého nemůže býti složen z křivek reálních.

Nová konstrukce plochy druhého stupně z devíti tečných rovin.

Podává vládní rada prof. **Vinc. Jarolímek.**

Dané roviny buďtež označeny číslicemi 1, 2, . . . 9, plocha žádaná φ^2. Stanovme průsečnici kterýchkoli dvou rovin, na př. $\overline{12} \equiv P$, a proložme přímkou P sborcenou plochu 2. stupně ε^2, která se dotýká dalších šesti rovin, třebas 3, . . . 8. Plocha tato je stanovena s dostatek, protože površka P zastupuje tři podmínky. Plochu ε^2 sestrojíme takto. Stanovme promítky plochy ε^2 z bodů $(3\,4\,5) \equiv r$, $(6\,7\,8) \equiv s$. Budou to dvě kuželové plochy 2. stupně $\varkappa^2$, λ^2, jež mají dvě společné roviny tečné ξ, η, obsahující spojnici $\overline{rs} \equiv O$; neboť přímkou P procházejí dvě tečné roviny ku ploše sborcené ε^2, jež dotýkají se i ploch $\varkappa^2$, λ^2. Ale i rovina $(Pr) \equiv \varrho$ je tečnou rovinou plochy ε^2, tedy i plochy $\varkappa^2$; kužel $\varkappa^2$ tudíž dotýkaje se rovin 3, 4, 5, ϱ, náleží k osnově kuželů o společném vrcholu r, určené těmito čtyřmi rovinami tečnými. Osnova tato promítá se z přímky O rovinovou involucí I, jíž družina ξ, η náleží. Involuce I je stanovena družinami rovinovými $\mu_1 \mu_2$, $\nu_1 \nu_2$, jimiž se průsečnice $(\overline{34}, \overline{5\varrho})$, $(\overline{35}, \overline{4\varrho})$ — jakožto dva degenerované kužele v osnově obsažené — z přímky O promítají. Je-li dále rovina $(Ps) \equiv \sigma$, bude kužel λ^2 náležeti osnově kuželů $(6\,7\,8\,\sigma)$, která se promítá z přímky O involucí rovinovou J; tato pak je dána družinami $\tau_1 \tau_2$, $\psi_1 \psi_2$, jimiž se průsečnice $(\overline{67}, \overline{8\sigma})$, $(\overline{68}, \overline{7\sigma})$ z přímky O promítají. Roviny ξ, η sestrojí se nyní společnou družinou obou involucí, I, J, dále pak kužel $\varkappa^2$ z pěti tečných rovin 3, 4, 5, ξ, η, jdoucích bodem r, a kužel λ^2 z tečných rovin 6, 7, 8, ξ, η, protínajících se v bodě s.

Plocha sborcená ε^2 je dána přímkou P a tečnými kuželi $\varkappa^2$, λ^2; plochy $\varkappa^2$, λ^2 mají dvě společné roviny tečné ξ, η, a přímka