Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

V. Rychlík

Invarianty kvaternární grupy kollineací řádu 2520

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 478--487

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122921`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1912

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Invarianty kvaternární grupy kollineací řádu 2520.

Napsal Dr. V. Rychlík.

Jest známo, že rovnice stupňů vyšších než čtvrtého nelze obecně řešiti odmocninami; nicméně však lze ještě u rovnic stupně pátého, šestého a sedmého zjednodušiti vyšetřování kořenů jako funkcí koefficientů tím způsobem, že vyjádříme kořeny pomocí kořenů systému rovnic, obsahujícího méně parametrů než daná rovnice, pro niž jsou koefficienty samy parametry, a pomocí koefficientů rovnice samé. Při tom parametry jsou algebraické funkce koefficientů původní rovnice, určené rovnicemi stupňů nižších; v případech dosud dopodrobna vyšetřených, totiž u rovnic stupně pátého a šestého lze dokonce vyjádřiti parametry ty odmocninami. Stanovení kořenů onoho speciálního systému rovnic, na nějž převádíme řešení rovnice, nazývá Klein, od něhož tato idea pochází, problémem forem, a to dle počtu homogenních proměnných binárním, ternárním atd. Lze pak řešení rovnice stupně pátého převésti na binární problém forem, rovnice stupně šestého na ternární, konečně řešení obecné rovnice stupně sedmého na kvaternární problém forem. To dokázal sám Klein, sestrojiv lineární grupu ve čtyřech proměnných isomorfní s alternující grupou o sedmi písmenách, jež je grupou obecné rovnice stupně sedmého, adjungujeme-li k oboru racionality odmocninu z diskriminantu, a nastínil též, jak lze redukci obecné rovnice na kvaternární problém forem provésti.

Pro podrobné provedení této myšlenky nejprve třeba jest znáti systém forem invariantních při Kleinově grupě. Tím se tedy budeme zabývati.

Jeden způsob, jímž možno vytvořiti kvaternární grupu 2520 kollineací, udal Klein (Math. Ann. 28, p. 499), jiný Maschke (Math. Ann. 51, p. 253). Kleinův způsob sestrojiti grupu má tu výhodu, že lze dle něho určiti každou kollineaci grupy nezávisle na ostatních, a že lze tedy bez námahy provésti místo potřebné transformace souřadnic novou konstrukci grupy. Abychom dle této methody sestrojili kollineace grupy, vyjděme od rovnice sedmého stupně, mezi jejímiž kořeny x_α platí relace $\Sigma x_\alpha = 0$, $\Sigma x_\alpha^2 = 0$, čehož lze dosíci u každé rovnice Tschirnhausovou transformací, a řešením rovnice druhého stupně. Pokládejme nyní x_α za přespočetné přímkové souřadnice v prostoru trojrozměrném, při čemž první z rovnic vykládáme jako vyjádření přespočetné souřadnice pomocí ostatních, druhou jako známou identitu mezi přímkovými souřadnicemi. Jsou-li bodové souřadnice homogenní bodu z (z_1, z_2, z_3, z_4) a bodu z' (z'_1, z'_2, z'_3, z'_4), jsou Plückerovy souřadnice jejich spojnice $p_{ik} = z_i z'_k - z_k z'_i$, a mezi nimi je relace $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$. Kleinovy souřadnice jsou lineárně nezávislé lineární formy Plückerových. Lineární transformace přímkových souřadnic, při nichž přechází forma vyjadřující kvadratickou relaci mezi nimi sama v sebe, značí v prostoru kollineaci nebo duální transformaci dle toho, je-li determinant její $+1$ nebo -1. Jsou tedy sudé permutace Kleinových souřadnic x_α kollineace, liché duální transformace.

V dalším budu užívati dvou soustav souřadných; první dostanu volbou

$$x_\alpha = \gamma^\alpha p_{12} + \gamma^{4\alpha} p_{13} + \gamma^{2\alpha} p_{14} + \gamma^{6\alpha} p_{34} + \gamma^{3\alpha} p_{42} + \gamma^{5\alpha} p_{23},$$

při čemž značí $\gamma = e^{\frac{2\pi i}{7}}$. Pak budou vytvořující operace grupy $S = (0123456)$ a $W = (365)$

$$S \pm z'_1 = z_1, \pm z'_2 = \gamma z_2, \pm z'_3 = \gamma^4 z_3, \pm z'_4 = \gamma^2 z_4,$$

$$W \pm z'_1 . i\sqrt{7} = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{2} z_1 + z_2 + z_3 + z_4,$$

$$\pm z'_2 i\sqrt{7} = z_1 + \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} z_2 + \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} z_3 + \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} z_4,$$

$$\pm z'_3 i\sqrt{7} = z_1 + \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} z_2 + \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} z_3 + \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} z_4,$$

$$\pm z'_4 i\sqrt{7} = z_1 + \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} z_2 + \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} z_3 + \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} z_4$$

Další monomiální substituce v této soustavě je $U = (124)(365)$

$$U \pm z'_1 = z_1, \pm z'_2 = z_3, \pm z'_3 = z_4, \pm z'_4 = z_2.$$

Tetraedr souřadnic je invariantní při grupě polometacyklické, vytvořené operacemi S a U.

V druhé soustavě souřadné bude tetraedr základní invariantní při metacyklické grupě vytvořené operacemi $\Sigma = (12345)$ a $\Upsilon = (06)(2354)$, čehož dosáhneme, volíme-li

$$\begin{aligned}
p_{12} &= x_1 + \eta^2 x_2 + \eta^4 x_3 + \eta x_4 + \eta^3 x_5 \\
p_{13} &= x + \eta x_2 + \eta^2 x_3 + \eta^3 x_4 + \eta^4 x_5 \\
p_{14} &= \varrho x_0 + \varrho' x_6, \\
p_{34} &= x_1 + \eta^3 x_2 + \eta x_3 + \eta^4 x_4 + \eta^2 x_5, \\
p_{42} &= x_1 + \eta^4 x_2 + \eta^3 x_3 + \eta^2 x_4 + \eta x_5, \\
p_{23} &= \varrho' x_0 + \varrho x_6,
\end{aligned}$$

při čemž značí $\eta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $\varrho = \dfrac{\sqrt{7} + i\sqrt{5}}{2}$, $\varrho' = \dfrac{\sqrt{7} - i\sqrt{5}}{2}$.

Pak bude

$$\Sigma \pm x'_1 = \eta x_1, \pm x'_2 = \eta^2 x_2, \pm x'_3 = \eta^3 x_3, \pm x'_4 = \eta^4 x_4,$$
$$\Upsilon \pm ix'_1 = x_3, \pm ix'_2 = x_1, \pm ix'_3 = -x_4, \pm ix'_4 = x_2.$$

Za další vytvořující operaci grupy můžeme zvoliti na př. $T = (016)$

$$\begin{aligned}
\pm x'_1 i\sqrt{5} &= \varrho x_1 + x_2 - x_3, \\
\pm x'_2 i\sqrt{5} &= x_1 - \varrho' x_2 - x_4, \\
\pm x'_3 i\sqrt{5} &= -x_1 - \varrho' x_3 - x_4, \\
\pm x'_4 i\sqrt{5} &= -x_2 - x_3 + \varrho x_4.
\end{aligned}$$

V grupě jest pak také operace $x = (23)(45)$

$$\begin{aligned}
\pm x'_1\sqrt{5} &= (\eta^2 - \eta^3)\, x_1 + (\eta^4 - \eta)\, x_4, \\
\pm x'_4\sqrt{5} &= (\eta^4 - \eta)\, x_1 + (\eta^3 - \eta^2)\, x_4, \\
\pm x'_2\sqrt{5} &= (\eta - \eta^4)\, x_2 + (\eta^3 - \eta^2)\, x_3, \\
\pm x'_3\sqrt{5} &= (\eta^3 - \eta^2)\, x_2 + (\eta^4 - \eta)\, x_3.
\end{aligned}$$

Σ a X vytvářejí známou Gordanovu grupu digredientních grup ikosaedrických na dvou mimoběžkách. Připojíme-li k nim Υ, dostaneme grupu řádu 120, připojíme-li $T\Upsilon$ nebo ΥT, dostaneme dvě subgrupy řádu 360.

Pro další postup mají tyto systémy souřadné tu výhodu, že v nich počítáno jest v obou pracích, o něž možno se opříti, a to v prvním v práci Maschkeově (Math. Pap. read at the congress at Chicago 1893, p. 175) a v druhém v Gordanově

(Math. Ann. XIII., p. 375). Maschke ve svém pojednání zabývá se úplným systémem kollineační grupy řádu 168, jichž jsou v G_{2520} dvě soustavy, Gordan úplným systémem grupy řádu 60, o jejíž existenci v naší grupě již jsme se zmínili.

Chtějíce sestrojiti invariantní formu grupy řádu 2520 mohli bychom tedy takto postupovati: vzali bychom invariantní formy některé subgrupy a skládali z nich formy, na něž bychom užili operace grupy řádu 2520, jež spolu s operacemi subgrupy vytvoří celou grupu, a pak stanovili takové relace mezi koefficienty, aby forma se neměnila. Na př. vezměme subgrupu řádu 168; těch jsou v grupě dvě soustavy, v jedné soustavě je grupa, jíž dostaneme z tvaru Maschkeova, klademe-li za jeho z_1 $\frac{1-i\sqrt{7}}{4}z_1$, v druhé grupa, kterou dostaneme transformací $z'_1=\frac{1+i\sqrt{7}}{4}z_1$. Poněvadž v Maschkeově tvaru jsou formy invariantní reálné, jsou invariantní formy obou grup sdružené. Sestrojme nyní invariantní formu jedné z G_{168} reálnou; ta bude invariantní i při druhé. Ale poněvadž obě G_{168} dohromady vytvářejí celou G_{2520}, bude to invariantní forma G_{2520}. Tak dostaneme v označení Maschkeově formy

$$A=7\Phi_4^2-42\Phi_8+3\,\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\,\Gamma_8,$$

$$B=20\Phi_{12}-490\Phi_8\Phi_4+7\Phi_6^2+\frac{-35-45i\sqrt{7}}{2}\,\Gamma_8\Phi_4,$$

při čemž vzaty jsou za Φ_4, Φ_6, Φ_8, Γ_8, Φ_{12} příslušné formy Maschkeovy, v nichž je provedena transformace $z'_1=\frac{1-i\sqrt{7}}{4}z_1$.

První forma vypsána zní

$$\begin{gathered}A=z_1^8+42z_1^5z_2z_3z_4-7z_1^4\,(z_2^3z_3+z_3^3z_4+z_4^3z_2)\\+42z_1^2\,(z_2^2z_3^3+z_3^2z_4^3+z_4^2z_2^3)+21z_1^2\,(z_2z_3^5+z_3z_4^5+z_4z_2^5)\\+21z_1^2z_2^2z_3^2z_4^2-3z_1\,(z_2^7+z_3^7+z_4^7)\\-21z_1\,(z_2^4z_3^2z_4+z_3^4z_4^2z_2+z_4^4z_2^2z_3)+7\,(z_2^6z_3^2+z_3^6z_4^2+z_4^6z_2^2)\\-28\,(z_2^3z_3^4z_4+z_3^3z_4^4z_2+z_4^3z_2^4z_3),\end{gathered}$$

z druhé vypíši jen několik členů

$$
\begin{aligned}
B = 2z_1^{12} - 90z_1^9 z_2 z_3 z_4 + 195z_1^8 (z_2^3 z_3 + z_3^3 z_4 + z_4^3 z_2) \\
+ 180z_1^7 (z_2^2 z_3^3 + z_3^2 z_4^3 + z_4^2 z_2^3) + \ldots - 20 (z_2^9 z_3^3 + z_3^9 z_4^3 + z_4^9 z_2^3) \\
+ 27 (z_2^2 z_3^{10} + z_3^2 z_4^{10} + z_4^2 z_2^{10}) - 336 (z_2^6 z_3^5 z_4 + z_3^6 z_4^5 z_2 + z_4^6 z_2^5 z_3) \\
- 120 (z_2^3 z_3^7 z_4^2 + z_3^3 z_4^7 z_2^2 + z_4^3 z_2^7 z_3^2) + 525 z_2^4 z_3^4 z_4^4.
\end{aligned}
$$

Tak bychom mohli vypočítati všechny invarianty; ale brzy stal by se počet velmi nepřehledným, na př. u invarianty stupně 24, jež existuje nezávislá, bylo by třeba určiti z lineárních rovnic 19 koefficientů.

Pohodlnější je nejprimitivnější methoda, jíž lze vůbec invariantní formy počítati, totiž vzíti nějakou formu v z, transformovati ji všemi operacemi grupy, a utvořiti součet všech hodnot, jichž nabude. Nejvýhodnější bude zajisté zvoliti formu lineární a tvořiti všechny symmetrické funkce hodnot, jichž nabývá. Za takovou formu můžeme zvoliti z_1, jež sama se nemění 21 operacemi grupy substitucí, tak že nutno bude počítati symmetrické funkce 120 forem. Tím vytvoříme všechny invariantní formy, neboť mezi lineárními formami, na něž se z_1 transformuje, lze nalézti čtyři lineárně nezávislé, pomocí jichž vyjádříme z_1, z_2, z_3, z_4.

Ale v grupě existuje substituce podobnosti $z'_1 = -z_1$, $z'_2 = -z_2$, $z'_3 = -z_3$, $z'_4 = -z_4$, při níž z_1 mění znamení. Vymizí tedy identicky všechny liché metrické funkce. Poněvadž pak není možno vybrati z 5040 substitucí 2520 tak, aby tvořily grupu, jak již Klein dokázal, nemohou vůbec žádné invarianty lichého stupně existovati; kdyby totiž byla taková forma invariantní, měnila by znamení aspoň při oné substituci podobnosti, při jiných substitucích by však neměnila znamení, a tyto by tvořily grupu, která by obsahovala 2520 substitucí; což je nemožno.

Dle vět o symmetrických funkcích stačí počítati součty stejných mocnin forem, na něž se $z_1 \,.\, i\sqrt{7}$ transformuje, a to jsou vedle $z_1 \,.\, i\sqrt{7}$ formy, které dostaneme operacemi G_{21} z forem

$$\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}z_1+z_2+z_3+z_4,\quad \frac{-3-i\sqrt{7}}{2}z_1+z_2+z_3+z_4,$$

$$2z_1+z_2+z_3+z_4,$$

$$z_1+\frac{1-i\sqrt{7}}{2}(z_2+z_3+z_4),\ z_1+\frac{1+i\sqrt{7}}{2}(z_2+z_3+z_4)$$

$$\frac{1-i\sqrt{7}}{2}z_1+(\gamma+\gamma^6)z_2+(\gamma^4+\gamma^3)z_2+(\gamma^2+\gamma^5)z_3,$$

$$\frac{1+i\sqrt{7}}{2}z_1+(\gamma+\gamma^6)z_2+(\gamma^4+\gamma^3)z_2+(\gamma^2+\gamma^5)z_3,$$

$$(\gamma-\gamma^6)z_2+(\gamma^4-\gamma^3)z_3+(\gamma^2-\gamma^5)z_4,$$

$$z_1+(-1-\gamma-\gamma^6)z_2+(-1-\gamma^4-\gamma^3)z_3+(-1-\gamma^2-\gamma^5)z_4.$$

Celkem vznikne 120 lineárních forem, označme libovolnou z nich X. Utvoříme-li součet ΣX^{2s} a rozvineme jej, vymizejí všechny sčítance, které nejsou invariantní pro substituci S, kdežto členy, které zbudou, vyskytují se jako cyklické funkce $z_2 z_3 z_4$, tedy se členem $z_2^{\lambda_2} z_3^{\lambda_3} z_4^{\lambda_4}$ vždy členy $z_3^{\lambda_2} z_4^{\lambda_3} z_2^{\lambda_4}$ a $z_4^{\lambda_2} z_2^{\lambda_3} z_3^{\lambda_4}$. I v koefficientech přicházejí pouze cyklické funkce čísel $(\gamma+\gamma^6)$ etc. a $(\gamma-\gamma^6)$, a těchto pouze sudé, čísla $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ a $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ pak vždy přicházejí symmetricky; poněvadž pak ona čísla jsou kořeny cyklických rovnic stupně třetího, jsou jich cyklické funkce racionálná čísla, která můžeme počítati postupně užívajíce těchže method, jimiž počítají se symmetrické funkce kořenů rovnic. Jsou tudíž koefficienty invariantních forem v souřadnicích z racionálná čísla, jak již bylo patrno na A a B.

Provedeme-li počet, shledáme, že ΣX^2, ΣX^4, ΣX^6 a ΣX^{10} mizejí identicky, kdežto $\Sigma X^8 = 7.960\,A$ a $\Sigma X^{12} = 2^5 . 3 . 7^2 . 11\,B$ jsou známé již formy invariantní. Další součty poskytnou nám nové invariantní formy, a to $\Sigma X^{14} = -\,2^5 . 3^2 . 5 . 7 . 11\,C$ při čemž

$$
\begin{aligned}
C = 8z_1^{14} &- 364z_1^{11}z_2z_3z_4 - 546z_1^{10}(z_2^3z_3 + z_3^3z_4 + z_4^3z_2) \\
&+ 546z_1^9(z_2^2z_3^3 + z_3^2z_4^3 + z_4^2z_2^3) + \ldots \\
&- 5(z_2^{14} + z_3^{14} + z_4^{14}) + 676(z_2^7z_3^7 + z_3^7z_4^7 + z_4^7z_2^7) \\
&- 364(z_2^{11}z_3^2z_4 + z_3^{11}z_4^2z_2 + z_4^{11}z_2^2z_3) \\
&- 364(z_2^4z_3^9z_4 + z_3^4z_4^9z_2 + z_4^4z_2^9z_3) \\
&+ 2821(z_2^8z_3^4z_4^2 + z_3^8z_4^4z_2^2 + z_4^8z_2^4z_3^2) \\
&- 2548(z_2^5z_3^6z_4^3 + z_3^5z_4^6z_2^3 + z_4^5z_2^6z_3^3).
\end{aligned}
$$

Podobně $\Sigma X^{18} = -2^8 . 3^3 . 7^2 . 13 . D$, a tu je

$$
\begin{aligned}
D = 8z_1^{18} &- 340z_1^{15}z_2z_3z_4 + 170z_1^{14}(z_2^3z_3 + z_3^3z_4 + z_4^3z_2) \\
&- 3570z_1^{13}(z_2^2z_3^3 + z_3^2z_4^3 + z_4^2z_2^3) + \ldots \\
&+ 25(z_2^{17}z_3 + z_3^{17}z_4 + z_4^{17}z_2) + 1870(z_2^{10}z_3^8 + z_3^{10}z_4^8 + z_4^{10}z_2^8) \\
&- 17(z_2^3z_3^{15} + z_3^3z_4^{15} + z_4^3z_2^{15}) + \ldots
\end{aligned}
$$

Počítáme-li takto ΣX^{16}, shledáme, že z možných členů člen $z_2^5z_3^{11}$, jenž není v A^2, vymizí, a členy prosté z_1 že jsou úměrné příslušným členům v A^2; ale to znamená, že lze tento součet vyjádřiti A^2. Naopak v součtu ΣX^{20} vyskytuje se člen $z_2z_3^{19}$, jenž není ve známé formě stupně 20 AB, tedy existuje invariantní forma stupně dvacet od AB lineárně nezávislá; blíže ji definujme tím, že má v bodu (1000) singulární bod, a označme ji E, tak že $\Sigma X^{20} = 2^5 . 3 . 5 . 7 . 11 . 17 (227 AB - 2^2 . 3 . 41 E)$ a

$$
\begin{aligned}
E = 16z_1^{17}z_2z_3z_4 &+ 24z_1^{16}(z_2^3z_3 + z_3^3z_4 + z_4^3z_2) \\
&- 20z_1^{15}(z_2^2z_3^3 + z_3^2z_4^3 + z_4^2z_2^3) + \ldots \\
&- (z_2z_3^{19} + z_3z_4^{19} + z_4z_2^{19}) - 86(z_2^8z_3^{12} + z_3^8z_4^{12} + z_4^8z_2^{12}) \\
&+ 13(z_2^{15}z_3^3 + z_3^{15}z_4^3 + z_4^{15}z_2^3) + \ldots
\end{aligned}
$$

Podobně najdeme ještě dvě nezávislé formy, stupně 24 a 30, jež zase definujeme tím, že v bodech (1000) mají co nejvyšší singularity. Bude pak

$$\Sigma X^{24} = 2^5 3^2 7^2 . 11 . 19 . 23 \left(206 A^3 + 587 . \frac{B^2 - 4A^3}{27} - 2^2 . 199 F\right)$$

při čemž

$$
\begin{aligned}
F = 16z_1^{20}(z_2^3z_3 + z_3^3z_4 + z_4^3z_2) &+ 32z_1^{19}(z_2^2z_3^3 + z_3^2z_4^3 + z_4^2z_2^3) + \ldots \\
+ 17(z_2^4z_3^{20} + z_3^4z_4^{20} + z_4^4z_2^{20}) &- 120(z_2^{11}z_3^{13} + z_3^{11}z_4^{13} + z_4^{11}z_2^{13}) \\
+ 10(z_2^{18}z_3^6 + z_3^{18}z_4^6 + z_4^{18}z_2^6) &+ 2z_2z_3z_4(z_2^{21} + z_3^{21} + z_4^{21}) + \ldots
\end{aligned}
$$

a podobně

$$\Sigma X^{30} = -2^4 3^3 . 5 . 7^2 . 11 . 13 . 29 (970 A^2 C + 192 BD - 5 . 61\, G),$$

kde značí

$$G = 256 z_1^{26} (z_2^3 z_3 + z_3^3 z_4 + z_4^3 z_2) - 768 z_1^{25} (z_2^2 z_3^3 + z_3^2 z_4^3 + z_4^2 z_2^3) + \ldots$$
$$+ 15 z_1^2 (z_2^{28} + z_3^{28} + z_4^{28}) + \ldots - 108 (z_2^5 z_3^{25} + z_3^5 z_4^{25} + z_4^5 z_2^{25})$$
$$- 6820 (z_2^{12} z_3^{18} + z_3^{12} z_4^{18} + z_4^{12} z_2^{18}) + 1580 (z_2^{19} z_3^{11} + z_3^{19} z_4^{11} + z_4^{19} z_2^{11})$$
$$+ 60 (z_2^{26} z_3^4 + z_3^{26} z_4^6 + z_4^{26} z_2^4) + \ldots$$

Existenci těchto dvou forem invariantních daleko snadněji zjistíme, počítáme-li v druhé soustavě souřadnic, tu shledáme, že nejvyšší členy v páru souřadnic $x_1 x_4$ jsou buď členy prosté $x_2 x_3$, nebo lineární v $x_2 x_3$, a že nemůže identicky vymizeti žádná invariantní forma, která tyto členy obsahuje. Poněvadž pak existují tři formy prosté $x_2 x_3$, stupňů 12, 20, 30, a čtyři lineární v $x_2 x_3$ stupňů 8, 14, 18, 24, máme aspoň těchto 7 primárních invariantních forem.

Abychom sestrojili invariantní formy v těchto souřadnicích, pišme v Gordanových formulích za $x_1 x_2 y_1 y_2$ naše $x_4 x_1 x_2 x_3$ a jeho formy značme stupni v párech proměnných. Pak bude na př. forma stupně 8 invariantní při G_{2520} složena z členů $F_{7,1}$, $F_{6,2}$, $F_{4,4}$, $F_{2,6}$, $F_{1,7}$. Poněvadž má býti invariantní při Γ, jímž se $F_{7,1}$ a $F_{1,7}$ zaměňují, a podobně $F_{6,2}$ a $F_{2,6}$, je

$$A = a (F_{7,1} + F_{1,7}) + b (F_{6,2} + F_{2,6}) + c . F_{4,4}.$$

Tato forma se nemění kollineací T, což involvuje jisté vztahy mezi a, b, c, jež zůstanou platnými i pro speciální hodnoty souřadnic; klaďme v T na př. $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, t. j. hledejme řez této přímky s plochou. Ale tato přímka se kollineací T nemění, jen body její přecházejí v sebe dle relací $x'_1 = 0$, $x'_2 = x'_3 = \dfrac{-\varrho' t_7 - t_2}{i\sqrt{5}}$, $x'_4 = \dfrac{-2t_1 + \varrho t_2}{i\sqrt{5}}$. Průsečíky její s plochou jsou určeny formou

$$a (t_1 t_2^7 - 8 t_1^7 t_2) + b (t_1^2 t_2^6 + 4 t_1^6 t_2^2) - c\, t_1^4 t_2^4$$

a ta tedy musí býti invariantní při binární substituci cyklické řádu 3

$$t'_1 i\sqrt{5} = -\varrho' t_1 - t_2, \quad t'_2 i\sqrt{5} = -2t_1 + \varrho t_2.$$

Z toho plynou ihned hodnoty $a : b : c = 3 : 4\sqrt{7} : 5\sqrt{7}$.

Tímtéž způsobem mohli bychom vypočítati i další invariantní formy. Ale počty brzy jsou velmi rozvláčné.

Zbývá ještě dokázati, že těchto 7 forem tvoří úplný systém. To lze provésti pomocí Bézoutova theorému. Mějme křivku řádu m; ta protne plochu řádu μ v $m\mu$ bodech. Dokážeme-li, že na křivce leží více než $m\mu$ bodů plochy, bude celá křivka ležeti na ploše. Leží-li pak daná křivka na dvou plochách φ a ψ, bude možno psáti rovnici plochy třetí χ, tou křivkou procházející, ve tvaru $\chi = u\varphi + v\psi$, kde u a v jsou formy, jsou-li splněny podmínky následující: 1. je-li křivka mnohonásobnou řádu q pro φ a r pro ψ, je pro χ mnohonásobnou řádu $q + r - 1$; 2. obě plochy se podél křivky nedotýkají, t. j. nemají ve všech bodech společnou rovinu tečnou.

Těmto oběma podmínkám vyhovuje průsečná křivka ploch AB, neboť je to jednoduchá křivka obou ploch, která má v bodě pětičetném ($x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$) tečné roviny na A $x_3 = 0$, na B $x_4 = 0$. Pro počítání průsečíků sluší vytknouti, že body sedmičetné ($z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 0$, $z_4 = 0$) jsou na křivce body dvojnými, v jichž okolí platí rozvoje $z_1 = \frac{21}{25} t^4 + \ldots$, $z_2 = 1 + \ldots$, $z_3 = -\frac{3}{5} t^2 + \ldots$, $z_4 = t^3 + \ldots$, tak že jest počítati u plochy D tento průsečík za 2, u E za 3, u F za 5 a u G za 8 bodů. Kromě zmíněných již pólů pětičetných a sedmičetných leží na křivce ještě trojčetné póly, tak že pro počet průsečíků plochy invariantní stupně m s křivkou platí rovnice

$$96\, m = 360\, h_1 + 504\, h_2 + 840\, h_3 + 2520\, h_4,$$

kde h_1 značí počet průseků v pólech sedmičetných, a tedy nikdy není $h_1 = 1$, h_2 v pětičetných, h_3 v trojčetných a h_4 v obyčejných bodech křivky. Diskutujeme-li tuto rovnici Diofantickou, najdeme, že všechna řešení dají se vyjádřiti pomocí řešení příslušných k známým formám C, D, E, F, G. V případech, že k určitému stupni patří více součinů základních forem než lineárně nezávislých forem určených řešeními Diofantické rovnice, existují syzygie; nejjednodušší z nich je stupně 38

$$C\,(3^3 . 5^2 . 7F - 2^2 5^2 A^3 - 7 . 17 B^2)$$
$$+ D\,(- 2 . 3^3 . 5^2 . 7E + 2^5 3^2 AB) - 2 . 3^3 5^2 AG = 0.$$

Další syzyganty jsou stupňů 44, 48, 54, 60, 68, tak že mezi nimi jsou jistě relace, jež representují syzygie druhého stupně.

Abychom zjistili, že pro každý stupeň dají součiny základních forem nalezených i přes syzygie všechny možné formy invariantní, počítejme dle Molienovy methody vytvořující funkci pro počet forem invariantních. Formy invariantní jsou ty z lineárních kombinací součinů proměnných $z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} z_3^{\lambda_3} z_4^{\lambda_4} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = s)$, které se transformují grupou identickou substitucí; počet jich tedy je dán dle vět Frobeniových o charakterech grup číslem h, které je koefficientem u x^s v rozvoji funkce

$$\frac{1}{5040} \Sigma \frac{h_\alpha}{\chi_\alpha(x)},$$

kde h_α značí počet elementů třídy substitucí v grupě, jejíž charakteristická rovnice je $\chi_\alpha(x)$. Vypočteme-li tuto funkci, dostaneme

$$\frac{1 + x^{24} + x^{30} - x^{38} - x^{44} - x^{68}}{(1 - x^8)(1 - x^{12})(1 - x^{14})(1 - x^{18})(1 - x^{20})}.$$

Odtud vyčteme, že existují primární invarianty stupňů 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30; součiny invariantů stupňů 24 a 30 dají se vyjádřiti pomocí ostatních forem, a kromě toho existují tři syzygie lineárné obsahující formy F a G.

O některých relacích metrických a jejich užití k analytickému řešení problému Apollonického.

Napsal **J. Sobotka.**

1. Mezi vzdálenostmi libovolných čtyř bodů A, B, C, D na přímce platí známá relace *Eulerova*

$$AB \,.\, CD + BC \,.\, AD + CA \,.\, BD = 0, \qquad (1)$$

jakož i relace *Stewartova*

$$AB \,.\, BC \,.\, CA + AB \,.\, CD^2 + BC \,.\, AD^2 + CA \,.\, BD^2, \qquad (2)$$

kterážto relace platí, jak zřejmo, i tenkráte, když D neleží na přímce ABC. Následkem toho lze relaci této dáti ještě násle-