Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Rychlík

Ein Beitrag zur Theorie der Potenzreihen von mehreren Veränderlichen

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 470--477

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122920`

Příspěvek k theorii potenčních řad o více proměnných.

Dr. Karel Rychlík.

Budiž $F(y, x_1, x_2, \ldots x_n)$ potenční řada, postupující dle mocností $y, x_1, x_2, \ldots x_n$ a nabývající hodnoty 0 pro $y = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0. \ldots x_n = 0$. Nechť $F(y, 0, 0, \ldots 0)$ není rovno identicky nulle, nýbrž nechť jest to potenční řada počínající členem y^m. Pak lze psáti

$$F(y, x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{1}$$
$$= E(y, x_1, x_2, \ldots x_n)\, G(y, x_1, x_2, \ldots x_n),$$

kdež $E(y, x_1, x_2, \ldots x_n)$ značí potenční řadu nabývající hodnoty různé od nully v bodě

$$y = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots x_n = 0 \quad \text{a}$$

$$G(y, x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{2}$$
$$= y^m + py^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \cdots + p_m,$$

kdež $p_1, p_2, \ldots p_m$ jsou potenční řady, postupující dle

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

a nabývající v bodě $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots x_n = 0$ hodnoty 0. Důkaz věty této podal Weierstrass v pojednání „Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehenden Sätze.“ (Werke II., str. 135—188), kdež nazývá ji větou přípravnou (Vorbereitungssatz). Lze ji však též dokázati nejprve formálně srovnáním koefficientů a pak dokázati konvergenci pomocí majorantních funkcí.*)

K tomu lze připojiti tuto poznámku: Máme-li potenční řadu

$$F = F_m + F_{m+1} + F_{m+2} + \ldots, \tag{3}$$

kdež F_k značí souhrn členů stupně k, můžeme vždy lineární substitucí dosíci toho, že se ve výrazu F_m vyskytuje člen y^m.

*) Viz na př. Goursat, Bul. Soc. Mat. de France 36, Hartogs, Münch. Ber. 39, Nr. 3, Dumas, Münch. Ber. 39, Nr. 18, Bliss, Bul. Am. Mat. Soc. 16, Brill, Mat. Ann. 69.

Pak bude

$$F_m = f(y, x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{4}$$
$$= y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \ldots + A_m,$$

kdež A_k značí formu stupně k v proměnných $x_1, x_2, \ldots x_n$ a užijeme-li věty Weierstrassovy, bude v 1. a 2.

$$G = y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \ldots + p_m, \tag{5}$$
$$p_k = A_k + p_{k,\, k+1} + p_{k,\, k+2} + \ldots$$

a $p_{k,\, l}$ značí souhrn členů stupně l.

Věta Weierstrassova umožňuje definovati dělitelnost potenčních řad o více proměnných zcela analogicky jako při polynomech a zavésti pojem resultantu a diskriminantu.

Poněvadž potenční řada $E(y, x_1, x_2, \ldots x_n)$ v okolí bodu $y = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots x_n = 0$ nemizí, jest převedeno hledání hodnot $y, x_1, x_2, \ldots x_n$ ležících v okolí bodu $y = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots x_n = 0$ a vyhovujících rovnici $F(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ na hledání kořenů rovnice

$$G(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0.$$

Dokážeme, že ke znázornění hodnot $y, x_1, x_2, \ldots x_n$ vyhovujících rovnici $F(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$, stačí konečný počet soustav potenčních řad

$$y = P(u_1, u_2, \ldots u_n)$$
$$x_1 = P_1(u_1, u_2, \ldots u_n)$$
$$\ldots\ldots$$
$$u_n = P_n(u_1, u_2, \ldots u_n),$$

kdež $u_1, u_2, \ldots u_n$ lze voliti jako rationální funkce $y, x_1, x_2, \ldots x_n$. Při důkaze stačí se omeziti na případ, že diskriminant rovnice té nemizí identicky. Důkaz provedeme úplnou indukcí. Budeme předpokládati, že věta ta platí pro řady, počínající členy stupně menšího než m-tého, a dokážeme, že platí pro řady počínající členy stupně m-tého. Pro řady počínající členy stupně prvního jistě platí. Z věty Weierstrassovy plyne pak totiž ihned

$$G(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = y + p_1(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

takže ke znázornění kořenů rovnice $F(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ stačí jediný systém

$$\begin{aligned} y &= -p_1(u_1, u_2, \ldots u_n) \\ x_1 &= u_1 \\ x_2 &= u_2 \\ &\ldots \\ x_n &= u_n. \end{aligned}$$

Je-li $m > 1$, kladme $F = EG$ a utvořme diskriminant Δ polynomu v y, G. Ježto dle předpokladu diskriminant ten nemizí, jest to potenční řada, postupující dle mocností $x_1, x_2, \ldots x_n$. Jedna z proměnných $x_1, x_2, \ldots x_n$ bude míti v úvaze následující význačné postavení. Začíná-li Δ konstantním členem, lze za onu význačnou proměnnou voliti kteroukoliv z proměnných $x_1, x_2, \ldots x_n$. Volme na př. $x_1 = x$. Nezačíná-li Δ konstantním členem, nýbrž členy stupně δ, proveďme na proměnných $x_1, x_2, \ldots x_n$ lineární transformaci tak, aby se mezi členy stupně δ vyskytoval skutečně člen na př. x_1^δ a volme pak za onu význačnou proměnnou $x_1 = x$.

I lze psáti

$$\begin{aligned} & f(y, x, x_2, x_3, \ldots x_n) \\ & = \varphi(y, x) + \psi(y, x, x_2, x_3, \ldots x_n), \end{aligned} \tag{6}$$

kdež $\varphi(y, x)$ značí souhrn členů obsahujících pouze y a x. Jest to forma stupně m v y a x.

Nechť jest

$$\varphi(y, x) = (y - \alpha_1 x)^{r_1} (y - \alpha_2 x)^{r_2} \ldots (y - \alpha_\varrho x)^{r_\varrho}, \tag{7}$$

kdež čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha$ jsou od sebe různá a

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_\varrho = m.$$

Zaveďme nové proměnné

$$\begin{aligned} y - \alpha_1 x &= xy' \\ x_2 &= x^2 x'_2 \\ x_3 &= x^2 x'_3 \\ &\ldots \\ x_n &= x^2 x'_n, \end{aligned}$$

nechávajíce x nezměněno. Transformace ta jest biracionálná. I bude

$$\varphi(y, x) = x^m y'^{r_1} (\alpha_1 - \alpha_2 + y')^{r_2} \ldots (\alpha_1 - \alpha_\varrho + y')^{r_\varrho}.$$

Člen $x^m y'^{r_1}$ má za koefficient

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^{r_1} (\alpha_1 - \alpha_3)^{r_2} \ldots (\alpha_1 - \alpha_\varrho)^{r_\varrho},$$

kterýž jistě nemizí. Ze všech ostatních členů v

$$G(y, x, x_2, \ldots x_n)$$

bude možno vytknouti x aspoň v mocnosti $m + 1$. Z toho plyne, že člen $x^m y'^{r_1}$ se s žádným z následujících členů nezruší.

Jest tudíž

$$G(y, x, x_2, x_3, \ldots x_m) = x^m F^{(1)}(y', x, x'_2, x_3, \ldots x'_m),$$

při čemž v potenční řadě $F^{(1)}$ jsou nejnižší členy stupně nanejvýše r_1, ježto se v ní nutně vyskytuje člen y'^{r_1}.

Stejně jako jsme pomocí činitele $y - \alpha_1 x$ přišli k potenční řadě $F^{(1)}$ lze pomocí ostatních činitelů

$$y - \alpha_2 x, \quad y - \alpha_3 x_1, \ldots y - \alpha_\varrho x$$

utvořiti potenční řady $F^{(2)}, F^{(3)}, \ldots F^{(\varrho)}$.

Dokážeme nyní, že hodnoty $y, x, x_2, \ldots x_n$, které v okolí bodu $y = 0$, $x = 0$, $x_2 = 0, \ldots x_n = 0$ vyhovují rovnici

$$G(y, x, x_2, \ldots x_n) = 0, \text{ t. j. též } F(y, x, x_2, \ldots x_n) = 0$$

jsou identické se souhrnem systémů hodnot $(y, x, x_2, \ldots x_n)$, které obdržíme substitucemi

$$\begin{array}{ccc} y - \alpha_1 x = xy', & & y - \alpha_\varrho x = xy' \\ x_2 = x^2 x'_2 & & x_2 = x^2 x'_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_n = x^2 x'_n & & x_n = x^2 x'_n \end{array} \tag{8}$$

z oněch systémů hodnot $(y', x, x'_2, \ldots x'_n)$, které vyhovují rovnicím

$$F^{(1)}(y', x, x'_2, \ldots x'_n) = 0, \ldots$$
$$F^{(\varrho)}(y', x, x'_2, \ldots x'_n) = 0$$

v okolí bodu $(y' = 0,\ x = 0,\ x'_2 = 0, \ldots x'_n = 0)$, tak že lze rovnici $G = 0$ nahraditi souhrnem rovnic $F^{(\lambda)} = 0$. Z relací 8) a relace

$$G(y, x, x_2, \ldots x_n) = x^m F^{(\lambda)}(y', x, x'_2, \ldots x'_n) \quad (9)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots \varrho)$$

plyne, že každé soustavě $(y', x, x'_2, \ldots x'_n)$ vyhovující v okolí bodu $y' = 0,\ x = 0,\ x'_2 = 0, \ldots x'_n = 0$ jedné z rovnic

$$F^{(\lambda)}(y', x, x'_2, \ldots x'_n) = 0$$

odpovídá soustava $(y, x, x_2, \ldots x_n)$, vyhovující rovnici

$$G(y, x, x'_2, \ldots x_n) = 0.$$

Potenční řada $F^{(\lambda)}(y', x, x'_2, \ldots x'_n)$ pro $x = 0,\ x'_2 = 0, \ldots x'_n = 0$ začíná členem y'^{r_λ}, tak že dle věty Weierstrassovy každé soustavě hodnot $(x, x'_2, \ldots x_{,n})$, ležící v okolí

$$(x = 0,\ x'_2 = 0, \ldots x'_n = 0),$$

odpovídá r_λ hodnot y'. Dvě různé z rovnic

$$F_\lambda = 0\ (\lambda = 1, 2, \ldots \varrho)$$

poskytují k hodnotám $(x, x_2, \ldots x'_n)$, ležícím v okolí $(x = 0,\ x'_2 = 0, \ldots x'_n = 0)$ různé soustavy $(y, x, x_2, \ldots x_n)$, neboť pro soustavy $(y, x, x_2, \ldots x_n)$, které obdržíme z $F_\lambda = 0$, konverguje poměr $\frac{y}{x}$ pro $x = 0$ k α_λ a veličiny α_λ jsou od sebe různé. K systémům hodnot $(x, x'_2, \ldots x'_n)$ určuje tedy souhrn rovnic $F_\lambda = 0$ v celku $r_1 + r_3 + \ldots + r_\varrho = m$ systémů $(y, x, x_2, \ldots x_m)$, vyhovujících rovnici $G = 0$. Hledejme naopak, kolik různých soustav $(y, x, x_2, \ldots x_n)$, pro něž jest $x_2 = x^2 x'_2, \ldots x_n = x^2 x'_n$ poskytuje rovnice $G = 0$. Klaďme do ní $x_2 = x^2 x'_2, \ldots x_n = x^2 x'_n$. Obdržíme tak z G potenční řadu $\overline{G}(y, x, x'_2, \ldots x'_n)$ a bude $\overline{G}(y, 0, 0, \ldots 0) = y^n$. Poskytuje tedy řada ta v okolí bodu $(x = 0,\ x'_2 = 0, \ldots x'_n = 0)$ m hodnot, tedy i m soustav $(y, x, x_2, \ldots x_n)$.

Pro m systémů $(y, x, x_2, \ldots x_n)$, které lze při daných hodnotách x, x'_2, x'_n, ležících v okolí $x = 0,\ x'_2 = 0, \ldots$

$x'_n = 0$, vypočísti z rovnic $F_\lambda^{(\lambda)} = 0$ $(\lambda = 1, 2, \ldots \varrho)$, jest vždy $x_2 = x^2 x'_2, \ldots x_n = x^2 x'_n$; systémy ty vyhovují rovnici $G = 0$, jich počet se shoduje s počtem systémů, které obdržíme přímo z oné rovnice, zavedeme-li do ní $x_2 = x^2 x'_2, \ldots x_n = x^2 x'_n$ a jsou také od sebe, není-li $x = 0$, různé. Jsou tedy systémy $(y, x, x_2, \ldots x_n)$ vypočtené z ϱ rovnic transformovaných identické se systémy vypočtenými přímo z rovnice $G = 0$. Jestliže tedy polynom $\varphi\left(\frac{y}{x}, 1\right)$ má více různých kořenů, můžeme převésti uvažování potenční řady $F(y, x_1, \ldots x_n)$, počínající členy stupně m, na uvažování konečného počtu potenčních řad, počínajících členy stupně nižšího, pro něž věta, kterou máme dokázati, platí.

Uvažujme nyní případ, kdy

$$\varphi(y, x) = (y - \alpha x)^m. \tag{7'}$$

Kladme opět

$$\begin{aligned} y - \alpha x &= x y' \\ x_2 &= x^2 x'_2 \\ x_3 &= x^2 x'_3 \\ &\cdots \\ x_n &= x^2 x'_n. \end{aligned} \tag{8'}$$

Nechť jest pak

$$G(y, x, x_2, \ldots x_n) = x^m F'(y', x, x'_2, \ldots x'_n), \tag{9'}$$

$$F'(y', x, x'_2, \ldots x'_n)$$
$$= E'(y', x, x'_2, \ldots x'_n)\, G'(y' x, x'_2, \ldots x'_n).$$

I mohou nastati dva případy.

Buď vyskytují se v G' členy stupně nižšího než m. Pak jest tvrzení dokázáno.

Neb jsou členy nejnižšího stupně m. Pak jest mezi nimi nutně y'^m, ježto se y'^m nemůže se žádným z ostatních členů, které jsou vesměs dělitelny x, zrušiti.

Shrňme opět členy stupně m v y' a x a označme příslušnou formu $\varphi'(y', x)$. Má-li polynom $\varphi'\left(\frac{y'}{x}, 1\right)$ různé kořeny, převedeno tím uvažování dané řady potenční na uvažování potenčních řad, počínajících členy stupně nižšího než m. Zbývá tedy uvažovati případ, kdy

$$\varphi'(y', x) = (y' - \alpha' x)^m$$

a klademe-li do $G'(y', x, x'_2, \ldots x'_n)$,

$$y' - \alpha' x = x y''$$
$$x'_2 = x^2 x''_2$$
$$\vdots$$
$$x'_n = x^2 x''_n$$

a označíme souhrn členů stupně m v y' a x $\varphi''(y'', x)$, jest opět $\varphi''(y'', x) = (y'' - \alpha'' x)^m$ a dokázati, že se postup ten nemůže opakovati do nekonečna.

Zaveďme do diskriminantu Δ postupně

$$\begin{array}{lll} x_2 = x^2 x'_2 & x'_2 = x^2 x''_2 & x_2^{(p-1)} = x^2 x_2^{(p-1)} \\ x_3 = x^2 x'_3 & x'_3 = x^2 x''_3 \quad \ldots\ldots & x_3^{(p-1)} = x^2 x_3^{(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n = x^2 x'_n & x'_n = x^2 x_n'' & x_n^{(p-1)} = x^2 x_n^{(p-1)}. \end{array}$$

Poněvadž se v něm vyskytuje jistě člen x^δ, bude

$$\Delta = x^\delta \Delta',$$

kdež Δ' jest potenční řada v x, $x_2^{(p)}$, $x_3^{(p)}$, $\ldots$ $x_n^{(p)}$ začínající konstantním členem.

Lze však psáti

$$\Delta = PG + Q\frac{\partial G}{\partial y}, \tag{10}$$

kdež P a Q jsou polynomy v y, jichž koefficienty jsou potenční řady v x, x_2, $\ldots$ x_n.

Zaveďme do této rovnice postupně proměnné

$$y', x, x'_2, x'_3, \ldots x'_n$$
$$y'', x, x''_2, x''_3, \ldots x''_n$$
$$\ldots\ldots$$
$$y^{(p)}, x, x_2^{(p)}, x_3^{(p)}, \ldots x_n^{(p)}.$$

Pak přejdou P a Q v polynomy v proměnných resp. y', y'', . . . $y^{(p)}$, jichž koefficienty jsou potenční řady resp. v x, x'_2. x'_3, . . . x'_n; . . . x, $x_2^{(p)}$, $x_3^{(p)}$, . . . $x_n^{(p)}$.

Poněvadž

$$G = x^m E' G'$$
$$G' = x^m E'' G''$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$G^{(p-1)} = x^m E^{(p)} G^{(p)},$$

bude

$$G = x^{mp} \Phi,$$

kdež Φ jest potenční řada v $y^{(p)}$, x, $x_2^{(p)}$, . . . $x_n^{(p)}$.

Uvážíme-li, že

$$\frac{\partial G}{\partial y'} = \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \ldots + \frac{\partial G}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y'} = \frac{\partial G}{\partial y}\, x,$$

a tedy

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x^{m-1}\frac{\partial E' G'}{\partial y'} = x^{m-1}\left(\frac{\partial G'}{\partial y'} E' + \frac{\partial E'}{\partial y'} G'\right),$$

bude postupně

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x^{(m-1)p}\, \Psi.$$

Z rovnice (10) plyne pak, že Δ je dělitelno aspoň $x^{(m-1)p}$ a tedy

$$(m-1)\, p \leqq \delta,$$
$$p \leqq \frac{\delta}{m-1},$$

čímž nalezena horní mez pro p.

Přijdeme tedy po konečném počtu transformací k potenční řadě, počínající členy stupně nižšího než m, pro niž věta, již máme dokázati, platí, z čehož plyne platnost její též pro předloženou řadu potenční.