František Josef Studnička

Odvození základních vzorců sférické trigonometrie pomocí některých pouček determinantních

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 4 (1875), No. 2, 49--57

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122913

Odvození základních vzorců sférické trigonometrie pomocí některých pouček determinantních.

Podává

Dr. F. J. Studnička.

Roku 1829 vyšla v Praze od *F. X. Motha*, pozdějšího učitele mého, kniha s nápisem

Die Lagrange-schen Relationen

und ihre

Anwendung zu einer neuen Entwickelung aller Gleichungen der sphaerischen Trigonometrie,

kdež velmi důvtipným spojením jedenácti soustav vzorcových, jež *Lagrange* ponejprv v pojednání svém „Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires" [1]) vyvinul a *Moth* tudíž po něm pojmenoval, především veliké množství nejrozmanitějších rovnic [2]) si zjednal a pak je tak sestavil, že bezprostředně z nich vyplynuly základní rovnice sférické trigonometrie, když jim dán příslušný výklad geometrický.

Mnohé z těchto rovnic představují na první pohled vlastnosti determinantů a vyvinují se v nauce o determinantech způsobem všeobecným a velmi stručným zároveň. Pročež odhodlal jsem se k tomu *přímo* vyvinouti pomocí pouček determinantních základní rovnice sférické trigonometrie, abych tím ukázal, jak důležité služby tato nová terminologie koná i na tomto poli. Měl jsem tedy při této práci více na zřeteli prostředky, jakými se přijde k cíli, nežli známé výsledky, jichž se tu dosáhne.

---

[1]) Nouv. Mém. de l'Acad. royale de Berlin, 1873.

[2]) Sestaveno tu 176 soustav vzorcových více než 700 rovnic obsahujících, z nichž mnohé ještě k dalším úvahám by sloužiti mohly.

Nežli však přejdeme k úloze samé, nutno sestaviti pomocné poučky z nauky o determinantech, jichž tu budeme používati, jakož i některé poučky z analytické geometrie v prostoru, které obsahují podstatu tohoto druhu vývinu, aby pak pomocí tohoto dvojího materiálu tím rychleji provedena byla úloha vlastní a tím jasněji vynikla úloha, jakou tu hrají determinanty.

Máme-li dva determinanty a sice:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

a sestavíme-li z nich podlé známých pravidel [3]) součin

$$D = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_3 \end{vmatrix},$$

platí o subdeterminantech, jež tu označíme čárkovanými písmenami příslušnými, poučka všeobecná

$$a'_k \alpha'_k + b'_k \beta'_k + c'_k \gamma'_k = \mathfrak{a}'_k \text{ ; [4])} \qquad (1)$$

jestli pak ve zvláštním případě pro $k = 1, 2, 3$

$$a_k = \alpha_k,$$
$$b_k = \beta_k,$$
$$c_k = \gamma_k,$$

z čehož jde bezprostředně, že i

$$\delta = \Delta,$$

obdržíme ze vzorce (1)

$$\alpha'^2_k + \beta'^2_k + \gamma'^2_k = \mathfrak{a}'_k,$$

aneb rozvineme-li, ve formě determinantní

$$(\alpha_2\beta_3)^2 + (\beta_2\gamma_3)^2 + (\gamma_2\alpha_3)^2 = \begin{vmatrix} \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2, & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3, & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 \end{vmatrix},$$

aneb ve formě obyčejné stejniny

---

[3]) Viz *Studnička* „O determinantech“ pag. 35.

[4]) Viz „Časop. pro pěstování mathematiky a fysiky R. II. pag. 77.

$$(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2)-(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3)^2$$
$$=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2+(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)^2+(\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2)^2. \quad (2)$$

Nazveme-li přidružený determinant k $\varDelta$ příslušný krátce $\varDelta'$ a označíme-li subdeterminanty soustavy $\varDelta$ velkými písmenami, položíme-li tedy

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

tu platí o subdeterminantech této nové soustavy poučka, že rovnají se součinu determinantu původního $\varDelta$ s příslušným determinantem doplňkovým téže soustavy původní [5]), tedy na př.

$$\begin{aligned} (B_2\, C_3) &= \alpha_1 \varDelta, \\ (C_2\, A_3) &= \beta_1 \varDelta, \\ (A_2\, B_3) &= \gamma_1 \varDelta \quad \text{atd.} \end{aligned} \qquad (3)$$

Znajíce tyto poučky, představme si tři roviny, které se protínají v jednom bodě, jejž považujeme za počátek pravoúhlé soustavy souřadnicové; rovnice těchto rovin jsou, zvolíme-li tvar normální [6]) a označíme-li kosinusy úhlů jednoduchými písmenami,

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv \alpha_1\, x + \beta_1\, y + \gamma_1\, z = 0, \\ R_2 &\equiv \alpha_2\, x + \beta_2\, y + \gamma_2\, z = 0, \\ R_3 &\equiv \alpha_3\, x + \beta_3\, y + \gamma_3\, z = 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

kdež platí zároveň všeobecně

$$\alpha^2_k + \beta^2_k + \gamma^2_k = 1. \qquad (5)$$

Úhly, jež uzavírají jednotlivé roviny mezi sebou, určeny jsou rovnicemi [7])

$$\begin{aligned} \cos\,(R_2\, R_3) &= \alpha_2\, \alpha_3 + \beta_2\, \beta_3 + \gamma_2\, \gamma_3, \\ \cos\,(R_3\, R_1) &= \alpha_3\, \alpha_1 + \beta_3\, \beta_1 + \gamma_3\, \gamma_1, \\ \cos\,(R_1\, R_2) &= \alpha_1\, \alpha_2 + \beta_1\, \beta_2 + \gamma_1\, \gamma_2. \end{aligned} \qquad (6)$$

Abychom si zjednali výrazy i pro sinusy těchto úhlů, použijme vzorce (5) a sestavme

$$\sin^2(R_2\, R_3) = (\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2) - (\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3)^2,$$

načež pomocí vzorce (2) snadno se obdrží

$$\sin^2(R_2\, R_3) = (\alpha_2\, \beta_3)^2 + (\beta_2\, \gamma_3)^2 + (\gamma_2\, \alpha_3)^2;$$

[5]) Viz *Studnička* „O determinantech“ pag. 41.

[6]) Viz *Studnička* „Úvod do analytické geometrie v prostoru“ pag. 24.

[7]) ibid. pag. 25.

zavedeme-li konečně pro $k = 1, 2, 3$ označení

$$M^2_k = A^2_k + B^2_k + C^2_k \tag{7}$$

povstane z poslední rovnice, označíme-li tu subdeterminanty příslušnými písmenami velkými

$$\sin(R_2 R_3) = M_1,$$

a podobně

$$\sin(R_3 R_1) = M_2, \tag{8}$$

$$\sin(R_1 R_2) = M_3.$$

Rovina R_2, R_3, R_1 protíná se s rovinou R_3, R_1, R_2 v přímce

$$P_1, P_2, P_3;$$

a tu jest rovnice

přímky P_1 tedy $\quad y = \frac{B_1}{A_1} x, \; z = \frac{C_1}{A_1} x,$

„ P_2 „ $\quad y = \frac{B_2}{A_2} x, \; z = \frac{C_2}{A_2} x,$

„ P_3 „ $\quad y = \frac{B_3}{A_3} x, \; z = \frac{C_3}{A_3} x.$

Úhly, jež tyto přímky uzavírají, určí se podlé známých [8]) vzorců

$$\cos(P_2 P_3) = \frac{A_2 A_3 + B_2 B_3 + C_2 C_3}{M_2 M_3},$$

$$\cos(P_3 P_1) = \frac{A_3 A_1 + B_3 B_1 + C_3 C_1}{M_3 M_1}, \tag{9}$$

$$\cos(P_1 P_2) = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{M_1 M_2}.$$

Abychom si pak zjednali výrazy i pro sinusy těchto úhlů, považme, že tu

$$\sin^2(P_2 P_3) = \frac{M_2^2 M_3^2 - (A_2 A_3 + B_2 B_3 + C_2 C_3)^2}{M_2^2 M_3^2},$$

načež pomocí vzorce (2) obdržíme především

$$\sin^2(P_2 P_3) = \frac{(A_2 B_3)^2 + (B_2 C_3)^2 + (C_2 A_3)^2}{M_2^2 M_3^2}$$

a použijeme-li vzorců (3)

$$\sin^2(P_2 P_3) = \frac{\Delta^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)}{M_2^2 M_3^2}$$

a tudíž konečně pomocí vzorce (5)

[8]) ibid. pag. 42.

a podobně
$$\sin(P_2\,P_3) = \frac{\Delta}{M_2\,M_3},$$
$$\sin(P_3\,P_1) = \frac{\Delta}{M_3\,M_1}, \tag{10}$$
$$\sin(P_1\,P_2) = \frac{\Delta}{M_1\,M_2}.$$

Znajíce i tyto vzorce, představme si, že triëder třemi rovinami (4) určený protne se koulí, jejíž střed leží v bodu počátečním, načež obdržíme sférický trojúhelník, jehož sférické úhly, jak obyčejně, písmenami A, B, C, a jehož sférické strany písmenami a, b, c buďtež označeny. Podlé zákonů analytické geometrie bude tu pak úhel

$(R_2\,R_3) = A$	$(R_3\,R_1) = 180^0 - B$	$(R_1\,R_2) = C$
$(P_2\,P_3) = 180^0 - a$	$(P_3\,P_1) = b$	$(P_1\,P_2) = 180^0 - c$.

A tu jde ze soustavy (6)
$$\begin{aligned} \alpha_2\,\alpha_3 + \beta_2\,\beta_3 + \gamma_2\,\gamma_3 &= \cos A, \\ \alpha_3\,\alpha_1 + \beta_3\,\beta_1 + \gamma_3\,\gamma_1 &= -\cos B, \\ \alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2 + \gamma_1\,\gamma_2 &= \cos C, \end{aligned} \tag{11}$$
podobně ze soustavy (9)
$$\begin{aligned} A_2\,A_3 + B_2\,B_3 + C_2\,C_3 &= -M_2\,M_3 \cos a, \\ A_3\,A_1 + B_3\,B_1 + C_3\,C_1 &= M_3\,M_1 \cos b, \\ A_1\,A_2 + B_1\,B_2 + C_1\,C_2 &= -M_1\,M_2 \cos c, \end{aligned} \tag{12}$$
vedlé toho pak ze soustavy (8)
$$\begin{aligned} M_1 &= \sin A, \\ M_2 &= \sin B, \\ M_3 &= \sin C, \end{aligned} \tag{13}$$
a konečně ze soustavy (10)
$$\begin{aligned} \Delta &= \sin B \sin C \sin a, \\ \Delta &= \sin C \sin A \sin b, \\ \Delta &= \sin A \sin B \sin c. \end{aligned} \tag{14}$$

Vzorce, které dosud jsme tuto sestavili, představují materiál, z něhož jest nám nyní odvoditi čtvero známých [9]) základních rovnic sférické trigonometrie.

Dělíme-li rovnice soustavy (14) součinem
$$\sin A \sin B \sin C,$$
obdržíme bezprostředně, přihlédneme-li k vzorcům (13)

---

[9]) Viz *Studnička* „Základové sférické trigonometrie“ pag. 8 et seqq.

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\Delta}{M_1 M_2 M_3}, \tag{15}$$

což vyjadřuje sinusovou poučku neb *druhý* základní vzorec sférické trigonometrie.

Zavedeme-li pak označení

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta'_1 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}$$

a nazveme-li $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{C}_k$ subdeterminanty k prvkům A_k, B_k, C_k příslušné, obdržíme podlé vzorce (1)

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 = \begin{vmatrix} A_2A_3 + B_2B_3 + C_2C_3, & A_3^2 + B_3^2 + C_3^2 \\ A_2A_1 + B_2B_1 + C_2C_1, & A_3A_1 + B_3B_1 + C_3C_1 \end{vmatrix}$$

aneb povážíme-li, že podlé poučky (3) jest

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= (B_2\, C_3) = \alpha_1\, \Delta, \\ \mathfrak{A}_2 &= (B_3\, C_1) = \alpha_2\, \Delta, \\ \mathfrak{B}_1 &= (C_2\, A_3) = \beta_1\, \Delta, \\ \mathfrak{B}_2 &= (C_3\, A_1) = \beta_2\, \Delta, \\ \mathfrak{C}_1 &= (A_2\, B_3) = \gamma_1\, \Delta, \\ \mathfrak{C}_2 &= (A_3\, B_1) = \gamma_2\, \Delta \end{aligned}$$

a použijeme-li vzorců (12), především

$$\Delta^2 (\alpha_1\, \alpha_2 + \beta_1\, \beta_2 + \gamma_1\, \gamma_2) = \begin{vmatrix} -M_2\, M_3 \cos a, & M_3^2 \\ -M_1\, M_2 \cos c, & M_3\, M_1 \cos b \end{vmatrix}$$

a tudíž pomocí příslušných vzorců soustavy (11) a (14) konečně

$$\sin a \sin b \cos C = -\cos a \cos b + \cos c,$$

aneb jak obyčejně se píše,

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

což představuje *první* základní rovnice sférické trigonometrie.

Stejným spůsobem obdržíme, položíme-li opět

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

podlé vzorce (1) především

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 \begin{vmatrix} \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3, & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 \\ \alpha_2\alpha_1 + \beta_2\beta_1 + \gamma_2\gamma_1, & \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 \end{vmatrix}$$

a tudíž pomocí vzorců (11), (12) a (13)

$$-\sin A \sin B \cos c = \begin{vmatrix} \cos A, & 1 \\ \cos C, & -\cos B \end{vmatrix} = -\cos A \cos B - \cos C,$$

což se obyčejně uvádí ve formě

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

co *čtvrtý* základní vzorec trigonometrie sférické.

Vyjádříme-li konečně čtverec determinantu $\varDelta$ tvarem

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2, & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2, & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_2\alpha_1 + \beta_2\beta_1 + \gamma_2\gamma_1, & \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2, & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1, & \alpha_3\alpha_2 + \beta_3\beta_2 + \gamma_3\gamma_2, & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \varDelta^2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

a označíme-li písmenem C_{ij} subdeterminant k prvku c_{ij} patřící, platí, jak známo,[10])

$$c_{31} C_{11} + c_{32} C_{12} + c_{33} C_{13} = 0$$

Sestavíme-li hodnoty těchto subdeterminantů

$$C_{11}, \; C_{12}, \; C_{13}$$

stále přihlížejíce k vzorci (1), obdržíme

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_1^2 + B_1^2 + C_1^2, \\ C_{12} &= A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2, \\ C_{13} &= A_1 A_3 + B_1 B_3 + C_1 C_3, \end{aligned}$$

a dosadíme-li je i s hodnotami prvků

$$c_{31}, \; c_{32}, \; c_{33}$$

do poslední rovnice, povstane z ní především

$$\begin{aligned} &(\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3)\,(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) \\ &+ (\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3)\,(A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2) \\ &+ (\alpha_3\alpha_3 + \beta_3\beta_3 + \gamma_3\gamma_3)\,(A_1 A_3 + B_1 B_3 + C_1 C_3) = 0, \end{aligned}$$

z kteréžto rovnice jde pomocí vzorců (11), (12) a (13).

---

[10]) Viz *Studnička* „O determinantech“ pag. 23.

$— \cos B \sin^2 A — \cos A \cos c \sin A \sin B + \cos b \sin C \sin A = 0$,
aneb dělíme-li součinem $\sin A \sin B$ a použijeme-li příslušného vzorce soustavy (15), konečně

$$\sin A \cot B + \cos A \cos c = \sin c \cot b\,,$$

což představuje *třetí* základní vzorec trigonometrie sférické.

Jak z tohoto výkladu jde na jevo, plyne druhý základní vzorec bezprostředně z výrazů, jaké se obdrží pro sinusy sférických stran, kdežto první, třetí a čtvrtý vzorec představuje geometrický výklad přiměřeně upravených pouček z nauky o determinantech. Zároveň tu porovnáním základu pro vzorec první a čtvrtý jde na jevo, že pro trojúhelník sférický mají prvky determinantu přidruženého $\varDelta'$ tentýž význam jako prvky determinantu původního $\varDelta$ pro přidružený sférický trojúhelník polární.

Ku konci budiž připomenuto, že nemá snad tento druh vývinu vzorců sférické trigonometrie, ač by i ostatní vzorce podobně bylo možná ustanoviti, obyčejné názornější spůsoby nahraditi neb docela vytisknouti, nýbrž že s jedné strany má na něm ukázáno býti, jak se některých pouček determinantních má s prospěchem použiti, s druhé strany pak objeviti hlubší spojení a vnitřní pásku, která rozličné tyto vzorce víže. A cíle tohoto jest, tuším, dosaženo. Kdyby pak někdo pobídnut byl tímto pojednáním, aby seznámil se blíže se základy nauky o determinantech, byl by účinek těchto řádků tím výdatnější!

Poznamenání.

Abychom vyvinuli základní vzorce sférické trigonometrie, nemusíme, jak tuto bylo učiněno a jak obyčejně se stává, na pomoc bráti kouli, jelikož se tu jedná pouze o úhly sklonu dvou rovin a poměr jich k plošným úhlům, stýkajícím se v jednom rohu. Užívání koule jest reminiscencí na staré doby, kde se užívalo vzorců sférické trigonometrie pouze v astronomii, jejíž potřeby vlastně splodily toto odvětví mathematické; neb v krystallografii odstraňuje se co možná tento kulový podstavec, aby tím jasněji vynikly hrany.

Že sférická trigonometrie celou svou podstatou patří vlastně do analytické geometrie v prostoru a sice tam, kde se jedná o poměrech, jaké poskytují tři roviny, bylo dávno již vysloveno, ačkoliv nikdo pro obšírnost nepoložil poučky této zvláštní a stářím zasvěcené nauky tam, kam patří.

Jak stará tato nauka jest, nelze přesně určiti; tolik však smí se tvrditi, že první astronomové, kteří měřili oblouky nebeské, již byli vedeni k zpytování poměrů, jaké tu platí. Určité doklady poskytuje nám však teprv III. kniha *Sfériky Menelaovy* a první kniha *Almagestu*, kdež první poučky sférické trigonometrie jsou vyloženy. Dalších pěstitelů nalezl odbor tento u *Arabů*, kteří tak pilně se zanášeli sférickou astronomií, a po nich v Evropě střední, kdež zejména *Regiomontan* a *Koprník* mnohým doplňkem vzácným ji obohatili. Ryze vědecky a soustavně vyvinul pak tuto nauku *Euler* v Mém. de Berlin, 1753 pag. 234 a Acta Petrop. 1779, I. pag. 92, načež *Lagrange* v Journ. de l'ecole polytechn., Cah. 6. pag. 270 ji uvedl na jediný princip, což *Gauss* mnohými poznámkami doplnil. Dalšího zdokonalení dostalo se nauce této *Möbiusem*, který odstraniv podmínku, že strany a úhly sférických trojúhelníků nesmí přesahovati 180°, zcela všeobecně ve své *analytické sférice* jedná o základech sférické trigonometrie, což po něm mnozí, jako *Baltzer*, stejně provádějí.

O měření země.

Napsal

Emanuel Čubr.

(Pokračování.)

6. Rozsáhlou práci mající určení tvaru a velikosti země z měření stupňů za účel provedl *Bessel;* opíral se při tom o výsledky *Schmidtovy*, rozšířil však základ, připojiv ještě další tři měření, a sice své vlastní ve *Východním Prusku* konané, dále pak výsledky oné části ruského měření, pokud právě pokročilo, totiž od *Belinu* k *Hoglandu*, a měření dánské *Schuhmachrem* provedené. Práci tuto uveřejnil v „*Schuhmacher's Astronomische Nachrichten.*"

Poměry použitých měření sestaveny jsou v následující tabulce. *)

*) Srovnej původní práci v „Schumacher's Astron. Nachr. 1837. XIV. Nr. 333, a 1842, XIX.