František Josef Studnička

Jak řešíli Arabové rovnice stupně třetího tvaru $x^3 - Px + Q = 0$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 4 (1875), No. 2, 89--92

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122912

Jak řešili Arabové rovnice stupně třetího tvaru $x^3 - Px + Q = 0$.

Podle Hankela podává

Dr. F. J. Studnička.

Aby vypočítali délku $\sin 1^0$ co možná určitě, použili Arabové známého vzorce

$$\sin 3\varphi = 3 \sin\varphi - 4 \sin^3\varphi,$$

aneb aby se vyjádřil poloměrem,

$$r^2 \sin 3\varphi = 3r^2 \sin\varphi - 4 \sin^3\varphi;$$

jestli tu r nová jednotka sexagesimální a položíme-li

$$\varphi = 1^0, \quad \sin 1^0 = x,$$

obdržíme především

$$60^r \sin 3^0 = 3 \cdot 60^r x - 4x^3;$$

a jelikož $\sin 3^0$ se pomocí druhých kořenů tak určitě dá ustanoviti, jak kdo chce, při čemž vyjde

$$\frac{1}{4} 60^r \sin 3^0 = 47^r\, 6^p\, 8'\, 29''\, 53''' = Q,$$

obdržíme pro vypočtení hodnoty $x = \sin 1^0$ rovnici

$$x^3 + Q = 45^r x.$$

A tuto rovnici uměli Arabové v davném věku řešiti spůsobem tak jednoduchým a duchaplným, že žádnou novější methodou přibližnou nebyli předstiženi.

Kdo byl vynálezcem tak důmyslným, nelze určiti; avšak zdá se, že již *Fibonacci* *) podlé ní ustanovoval přibližné hodnoty kořenů kubických a že pro Araby byla jen potud důležitou, pokud jim pomáhala při sestrojování tabulek trigonometrických, na něž vynakládali píli všemožnou. Aspoň neznáme jiného případu, kde by jí byli užívali, a jmenovaný otec novéké arithmetiky řešil rovnici

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

na tolik míst určitě, že sotva jinou methodou bylo by možná tehdáž tak dopodrobna kořen příslušný ustanoviti.

---

*) Srovnej *Studnička* „O původu a rozvoji nauky o číslech“ Čas. t. r. IV., pag. 12.

Rovnice, o které tu mluvíme, má všeobecný tvar
$$x^3 - Px + Q = 0, \qquad (1)$$
aneb jak pro naše potřeby nutno ji napsati
$$x = \frac{x^3 + Q}{P}. \qquad (2)$$

Jestli x proti Q jen malé — a tu podléhá methoda naše velkému obmezení —, vynechme je pro *první* přibližnou hodnotu kořene x_1, načež obdržíme dělením *)
$$\frac{Q}{P} = a + \frac{R}{P}$$
a tudíž
$$x_1 = a = \frac{Q-R}{P}; \qquad (3)$$
pravá hodnota kořene bude tedy
$$x = a + \beta.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice (2), bude
$$a + \beta = \frac{(a+\beta)^3 + Q}{P},$$
z čehož pak jde
$$\beta = \frac{(a+\beta)^3 + Q - aP}{P},$$
aneb použijeme-li vzorce (3),
$$\beta = \frac{(a+\beta)^3 + R}{P}, \qquad (4)$$
což se srovnává co do tvaru s rovnicí (2).

Pro *druhou* přibližnou hodnotu považme opět β za nepatrné proti a, načež bude
$$\beta = \frac{a^3 + R}{P} = b + \frac{S}{P},$$
z čehož snadným převedením obdržíme
$$b = \frac{a^3 + R - S}{P}$$
a tudíž
$$bP - R = a^3 - S, \qquad (5)$$
takže když dosadíme tuto hodnotu do rovnice (4), povstane

*) Viz *Hankel* „Zur Geschichte de Mathematik“ pag. 290.

$$\beta = \frac{(a+b+\gamma)^3 + R}{P} = b + \gamma$$

neb

$$\gamma = \frac{(a+b+\gamma)^3 + R - bP}{P}$$

aneb použijeme-li rovnice (5)

$$\gamma = \frac{(a+b+\gamma)^3 - a^3 + S}{P},$$

což se opět co do tvaru srovnává s rovnicí (2).

Pro *třetí* hodnotu přibližnou považujme tedy γ za nepatrnou veličinu proti $(a + b)$, načež bude

$$\frac{(a+b)^3 - a^3 + S}{P} = c + \frac{T}{P},$$

tedy

$$c = \frac{(a+b)^3 - a^3 + S - T}{P},$$

$$\gamma = c + \delta \text{ atd.}$$

Tímto spůsobem zjednáme si postupně

$$\begin{aligned} x &= a + \beta \\ \beta &= b + \gamma \\ \gamma &= c + \delta \\ &\quad \ldots\ldots, \end{aligned}$$

takže hodnota kořene tu konečně bude

$$x = a + b + c + d + \ldots$$

a tudíž vyjádřena tak určitě, jak kdo chce.

Na příkladu číselném pozná se nejlépe postupný chod tohoto spůsobu řešení.

Jest-li na př. řešiti rovnici

$$x^3 - 14x + 6{\cdot}7 = 0,$$

obdržíme postupně tento výpočet:

	=
P	14
Q	6·7
a	0·4
aP	5·6
R	1·1
a^3	0·064
$R+a^3$	1·164
b	0·08
bP	1·12
S	0·044
$(a+b)^3-a^3$	0·046592
$S+(a+b)^3-a^3$	0·090592
c	0·0006
cP	0·084
T	0·006592
$(a+b+c)^3-(a+b)^3$	0·004199
$T+(a+b+c)^3-(a+b)^3$	0·010791
d	0·0008
dP	0·0112
U	— 0·000409
$(a+b+c+d)^3-(a+b+c)^3$	0·000568
$U+(a+b+c+d)^3-(a+b+c)^2$	0·000159
e	0·00001
eP	0·000140
V	0·00019

a t. d.

A tu jest tedy na 5 míst desetinných určitě

$$\begin{array}{l} \quad\;\; a\; b\; c\; d\; e \\ x = 0\cdot\, 4\; 8\; 6\; 8\; 1. \end{array}$$