František Hromádko

Analytický důkaz spůsobu, jakým lze sestrojiti normálu k ellipse

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 4 (1875), No. 2, 87--88

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122909`

Vpíšeme-li do čtverce AC, jehož strana

$$AB = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

čtverec AC', jehož strana

$$AB' = 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1,$$

bude plocha *gnomonu* $BCDD'C'B'B$ patrně

$$2\,BCC'B'B = 2 \cdot \frac{n}{2}\begin{pmatrix}1 + 2 + 3 + \ldots + n-1 \\ 1 + 2 + 3 + \ldots + n-1 + n\end{pmatrix} = n^3.$$

Podobně bude plocha gnomonu $B'C'D'D''C''B''B'$, kdež $B'B'' = n - 1$,

$$2B'C'C''B''B' = (n-1)^3 \text{ atd.}$$

Vyplníme-li tedy čtverec AB neb

$$ABCD = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

samými gnomony způsobem právě naznačeným, obdržíme

$$n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + \ldots + 3^3 + 2^3 + 1^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2,$$

což se úplně shoduje se vzorcem (2). Zároveň tu patrno, jak názorně dovedli staří Indové mnohé pravdy mathematické vyváděti! *)

Analytický důkaz způsobu, jakým lze sestrojiti normálu k ellipse.

Podává

prof. **Hromádko** v Táboře.

Sestrojíme-li nad velkou osou ellipsy, jejíž rovnice v pravoúhlých souřadnicích jest

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

kruh poloměru a, bude rovnice jeho

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Pro společnou úsečku x_1 libovolného bodu ellipsy obdržíme Y_1 co pořadnici kruhu a y_1 co pořadniciel lipsy, o nichž platí

$$Y_1 : y_1 = a : b,$$

z čehož jde

*) Viz *Hankel* „Zur Geschichte der Mathematik" pag. 192.

$$Y_1 = \frac{a}{b} y_1 .$$

Opíšeme-li mimo to okolo středu ellipsy kruh poloměrem $(a+b)$, bude rovnice jeho

$$x^2 + y^2 = (a+b)^2.$$

Spojíme-li rovnici tuto s rovnicí přímky procházející středem ellipsy a bodem $(Y_1 x_1)$, tedy s rovnicí

$$y = \frac{a y_1}{b x_1} x,$$

obdržíme pro souřadnice průseku této přímky s oním kruhem hodnoty

$$x_2 = \frac{a+b}{a} x_1, \quad y_2 = \frac{a+b}{b} y_1 .$$

Sestavíme-li pak rovnici přímky procházející body $(x_1 y_1)$ a $(x_2 y_2)$, přesvědčíme se po malé redukci, že ji lze uvésti na tvar

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1),$$

kdežto rovnice tečny vedené k bodům ellipsy $(x_1 y_1)$ jest, jak známo,

$$y - y_1 = - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) .$$

Porovnáme-li poslední dvě rovnice, poznáme ihned, že značí přímky v bodu $(x_1 y_1)$ se protínající a kolmo na sobě stojící; a poněvadž tato značí tečnu, značí ona normálu, z čehož plyne pro sestrojení normály pravidlo toto:

*Opišme ze středu dané ellipsy, jejíž velká poloosa jest a, malá pak b, kruh poloměru a a poloměru $(a+b)$, spusťme s daného bodu, k němuž se má vésti normála, kolmici na hlavní osu a vyhledejme průsek její s kruhem prvním; tímto průsekem a středem kruhu veďme pak přímku a spojme konečně bod, v němž protíná přímka tato kruh druhý, s daným bodem ellipsy přímkou, ana představuje pak normálu.**)

Znajíce normálu, sestrojíme pak snadno i tečnu.

*) Příslušný výkres každý snadno si sestrojí.