Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Alexander Fischer

Über ein einfaches Rechenbild (Nomogramm) für die Bestimmung der reellen Wurzeln dreigliedriger algebraischer Gleichungen

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 1, 52--56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122905

Über ein einfaches Rechenbild (Nomogramm) für die Bestimmung der reellen Wurzeln dreigliedriger algebraischer Gleichungen.

Alexander Fischer, Prag.

(Eingegangen am 21. Dezember 1935.)

Übersicht: Es wird gezeigt, daß das C. F. Gausssche Verfahren zur Lösung von dreigliedrigen algebraischen Gleichungen mittels Additionslogarithmen, im Gegensatz zu den Lösungen von H. Schwerdt, in allen Fällen auch mit Hilfe einer einfachen Fluchtlinientafel nomographisch durchführbar ist.

1. In seinem Werke „Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik" gibt H. Schwerdt [1][1]) (S. 80) Nomogramme für die Lösung trinomischer Gleichungen nach dem Verfahren von C. F. Gauss (Vgl. hierzu z. B. [2], S. 260!). Und zwar sind als wichtigste diejenigen Tafeln zu nennen, die zur Bestimmung des Hilfswinkels dienen, aus dem dann die gesuchten Wurzeln der vorgelegten Gleichung ohneweiters folgen. Im folgenden möchte ich nun zeigen, daß die Verwendung der Additionslogarithmen, die sich in dem erwähnten Verfahren als der zweite Hauptschritt desselben darstellt, die Lösung aller Fälle mit Hilfe eines *einzigen* Rechenbildes (Nomogramms) ermöglicht, für dessen Benutzung allerdings mehr Nebenrechnungen erforderlich sind als bei den von H. Schwerdt gegebenen Tafeln, das aber dafür wesentlich einfacheren Baues ist. Und zwar soll die Herleitung in Anschluß an C. Runge [3], (S. 121) erfolgen, woselbst das genannte Verfahren von C. F. Gauss in einer vereinfachten Form, d. h. nämlich, unter Ausschaltung der goniometrischen Hilfsgrößen, gegeben wird.

2. Wie daselbst gezeigt, kommen bei der Bestimmung der positiven Wurzeln — die negativen erhält man durch Übergang zu $-x$ — die folgenden drei Fälle

[1]) Die Zahlen in [eckigen] Klammern beziehen sich auf den Schriftennachweis am Schlusse der Arbeit!

$$\left.\begin{array}{l}1.\ x^{m+n} + ex^m - f = 0,\\ 2.\ x^{m+n} - ex^m - f = 0,\\ 3.\ x^{m+n} - ex^m + f = 0,\end{array}\right\} \tag{A}$$

$(e > 0, f > 0)$ in Betracht, von denen wieder nur der erste und dritte wesentlich verschieden sind. Alle diese Fälle führen aber schließlich auf die folgende transzendente Funktionsbeziehung:

$$\frac{A}{\mathfrak{A}(m, n, e, f)} + \frac{B}{\mathfrak{B}(m, n, e, f)} = 1, \tag{B$_1$}$$

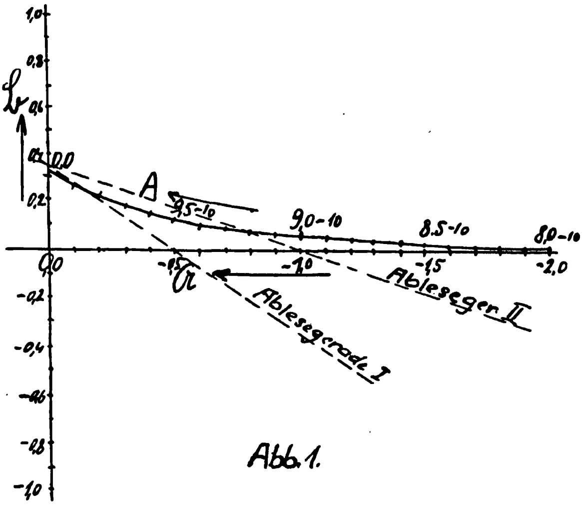

Abb. 1.

wobei

$$A = \lg \sigma,\ B = \lg (\sigma + 1), \tag{B$_2$}$$

[daher $B = B(A)$] und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *bekannte* Funktionen der Koeffizienten und Exponenten in der vorgelegten Gleichung sind.

Die eben erwähnte Funktionsbeziehung ist aber nach bekannten Verfahren (vgl. hierzu auch [4; 1]!) durch die in Abb. 1 dargestellte Tafel darstellbar. Hierbei wird $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ numerisch berechnet und die hierdurch festgelegte „Ablesegerade" schneidet auf der nach „A" kotierten „Lösenden Kurve" das gesuchte A heraus, aus dem nach einfachen Rechnungen die gesuchten Wurzeln folgen.

3. Als *Anwendungsbeispiel* möge das von C. Runge gegebene (erste) Beispiel dienen:

$$x^3 - 3{,}5292x + 2{,}118176 = 0. \tag{C}$$

Ersichtlicherweise fällt dies unter Fall 3. Hier ist zu setzen (vgl. [3]!):

$$x = \sqrt[m+n]{f}\,t, \text{ daher } t^n + t^{-m} = \lambda^{-\frac{1}{n+m}},$$
$$\lambda = f^n e^{-(m+n)},$$

wobei λ bestimmte Kriterien erfüllen muß, aus denen die Anzahl und Größe der positiven Wurzeln t folgt.

Nach numerischer Einsetzung ergibt sich:

$$\lg \lambda^{-1} = 0{,}991104$$

und, da

$$\lambda^{-1} > \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$$

und

$$\lambda^{-1} > 2^{m+n},$$

so ergeben sich zwei Wurzeln: $t > 1$ und $0 < t < 1$.

α) Für $t > 1$ setzen wir

$$A = \lg t^{-(m+n)},$$

woraus

$$-nA + (n+m)\,B = -\lg \lambda$$

oder in unseren Falle

$$-2A + 3B = 0{,}991104$$

folgt. Es ist daher

$$\mathfrak{A} = -0{,}495552,$$
$$\mathfrak{B} = 0{,}330368.$$

Die hiedurch festgelegte „Ablesegerade I" schneidet auf der „Lösenden Kurve" den Wert $A = 9{,}85 - 10$ heraus, aus dem nach Benutzung der Tafel der Additionslogarithmen der genaue Wert $9{,}858432 - 10$ und hieraus schließlich $x = 1{,}43167$ folgt.

β) Für $0 < t < 1$ ist zu setzen:

$$A = \lg t^{m+n},$$

daher

$$-mA + (n+m)\,B = -\lg \lambda$$

oder in unserem Falle

$$-A + 3B = 0{,}991104.$$

Hier ist

$$\mathfrak{A} = -0{,}991104,$$
$$\mathfrak{B} = 0{,}330368.$$

Die „Ablesegerade II" ergibt $A = 9{,}20 - 10$, aus dem nach Verbesserung $A = 9{,}200971 - 10$ und hieraus $x = 0{,}695521$ folgt.

4. Obwohl durch die in Abb. 1 gegebene Tafel das Hauptziel, die Bestimmung von A, erreicht wurde, womit die Aufgabe also im wesentlichen gelöst erscheint, möge noch in Kürze auf die *nomographische Bestimmung der Größen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ einerseits und x

anderseits eingegangen werden, da auch diese ohne größere Schwierigkeit möglich ist.

α) Wie aus dem obigen Beispiel ersichtlich, ist im Falle α)

$$\mathfrak{A} = \frac{\lg \lambda}{n} = \frac{n \lg f - (m+n) \lg e}{n},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{-\lg \lambda}{m+n} = \frac{-n \lg f + (m+n) \lg e}{m+n},$$

die beide von der allgemeinen Form

$$\mathfrak{R}_i = \varphi_1\left(\frac{m}{n}\right) \lg f + \varphi_2\left(\frac{m}{n}\right) \lg e \tag{D}$$

($i = 1, 2$) sind — und dies gilt, wie eine nähere Untersuchung zeigt, auch in den andern, in Betracht kommenden Fällen. Nach bekannten Verfahren ist aber diese Funktionsbeziehung durch eine Fluchtlinientafel mit zwei parallelen Trägern für e und f und einem Netz von Doppelkotenpunkten $\left(\mathfrak{R}_i, \frac{m}{n}\right)$ darstellbar, wobei zusammen gehörige Werte von e, f, $\mathfrak{R}_i$ und $\frac{m}{n}$ auf der „Ablesegeraden" liegen. Da die beiden Funktionsbeziehungen (D) ein Paar linearer Gleichungen für $\lg e$ und $\lg f$ darstellen, können die beiden Tafeln hierfür allenfalls längs der beiden parallelen Träger übereinandergelagert werden. Man erhält dann durch *eine* Ablesung $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$.

β) Eliminiert man anderseits aus x und A die Hilfsgröße t, so erhält man in unseren Fällen

$$\lg x = \frac{1}{m+n} \lg f + \lg t,$$

daher

$$\lg x = \frac{1}{m+n} \lg f \mp \frac{A}{m+n},$$

also eine Funktionsbeziehung von der allgemeinen Form

$$f_1(x_1)\, f_2(x_2) = f_3(x_3) + f_4(x_4),$$

die sich der allgemeineren (D) unterordnet- und ähnliches gilt in den andern Fällen. Es ist daher auch die Bestimmung von x aus f, A und (m, n) nomographisch durchführbar.

Allerdings dürfte, der Genauigkeit halber, die jeweilige *numerische* Bildung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vorzuziehen sein.

5. Wie leicht einzusehen, ersetzt die in Abb. 1 gegebene Tafel die in [2] und [3] erwähnten, mir leider unzugänglichen Tafeln von

S. Gundelfinger. Sie stellt anderseits nichts anderes vor als die graphische Darstellung der Additionslogarithmen für negative A, die in Fig. 4 des Buches von C. Runge gegeben wird, aus der sie auch auf einfachste Weise erhalten worden ist.

6. Für eine weitere nomographische Lösungsart dreigliedriger algebraischer Gleichungen vgl. meine Arbeit [4, 2], woselbst auch weiteres Schrifttum über diesen Gegenstand angeführt ist.

Prag, 19. Dezember 1935.

*

O jednom jednoduchém nomogramu pro určení reálných kořenů trinomických algebraických rovnic.

(Obsah předešlého článku.)

Řešení trinomických algebraických rovnic o kanonických tvarech (A) vede podle C. F. Gaussovy metody a použitím adičních logaritmů k funkčním vztahům (B_1) a (B_2), pro které jest navržen spojnicový nomogram. Po výpočtu veličin $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ z daných hodnot e, f, m, n obdržíme pomocí nomogramu veličinu A a pak dále kořeny x. Postup jest vysvětlen na číselném příkladě (C). — Konečně jest krátce ukázáno, že i tvoření veličin $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ a výpočet kořenů x jest možno provésti spojnicovými nomogramy s dvojkótovanými body.

Schriftennachweis.

1. H. Schwerdt. Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik. Berlin 1931.

2. R. Fricke. Lehrbuch der Algebra. 1. Band: Allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen. Braunschweig 1924.

3. C. Runge. Praxis der Gleichungen. 2. Aufl., Berlin-Leipzig 1921.

4. A. Fischer. 1. Über ein neues allgemeines Verfahren zum Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomogrammen), insbesondere von Fluchtlinientafeln. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.: 1927, H. 3 u. 5; 1928, H. 4; 1929, H. 5.

2. Über ein Rechenbild (Nomogramm) für die allgemeine dreigliedrige Gleichung $Ax^m + Bx^n = 1$. HDI-Mitteilungen des Hauptvereines deutscher Ingenieure in der Tschechoslow. Rep. (Brünn): 1936, H. 3/4.