

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

Zdeněk Pírko

Matematická teorie zvukoměříčství

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 1, D1--D14

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122895>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1937

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ČLÁNKY A REFERÁTY.

Matematická teorie zvukoměřictví.

Zdeněk Pírko, Praha.

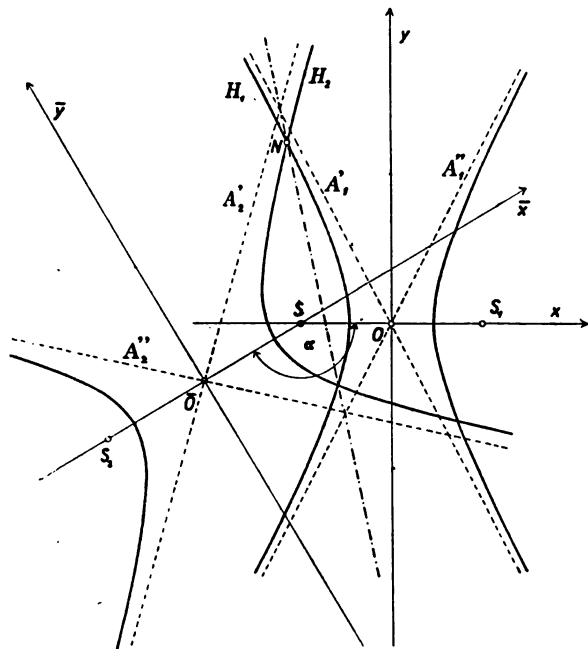
1. Úvod.

Základní úloha zvukoměřictví jest tato: Určiti polohu zvukového zdroje  $N$ , byly-li zjištěny časové rozdíly  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ , po kterých zvuková vlna, vyšlá ze zdroje  $N$ , dospěla do naslouchacích stanic  $S_1, S_2, S_3, \dots$  *později* (nebo *dříve*) než do stanice  $S$  (stanice hlavní nebo ústředny). Pro praktické řešení úlohy činíme dva předpoklady: 1. Akustický rozruch se šíří ze zdroje  $N$  na všechny strany rovnoměrnou a známou rychlostí; zvuková vlna jest tudíž v každém okamžiku koulí. 2. Body  $N, S, S_1, S_2, S_3, \dots$  leží v téže rovině; kulová vlna jest tedy rovinou těchto bodů protata v každém okamžiku v hlavní kružnici, jejíž poloměr se rovnoměrně zvětšuje.<sup>1)</sup>

Za těchto omezujících předpokladů byla vybudována řada metod, které řeší základní úlohu s větší nebo s menší přesností. Tyto metody rozdělují podle jejich charakteristických znaků do třech základních skupin, z nichž každá obsahuje vedle řešení analytického ještě řešení grafická a to přesná i přibližná. Poznamenejme však ihned, že pojmenování „přesné řešení grafické“ jest do jisté míry relativní, zvláště tehdy, jestliže základ takové metody tvoří rýsování kuželoseček a stanovení jejich průsečíků; přesnost řešení je tu omezena přesností, s jakou tyto kuželosečky rýsujeme. Tato přesnost může býti libovolně zvyšována a dokoňce dosažena, postavíme-li se na stanovisko ryze teoretické, naproti tomu je však zřejmé, že pro praktickou aplikaci zvukoměřictví s časem omezeným, taková striktní řešení nepřijdou nikdy v úvahu. V skupině první a druhé probereme ta řešení, která uvažují zvukoměřičskou úlohu jako problém rovinný v souhlasu s druhým předpokladem, který jsme uvedli; třetí skupina je skupina řešení prostorových, uvidíme však, že velmi jednoduchým způsobem

<sup>1)</sup> Tento článek tvoří teoretický doplněk článku „Zvukoměřictví“, uveřejněného v „Rozhledech matematicko-přírodovědeckých“ 15 (1936), 93—95 a 124—126.

a s postačující přesností lze úlohu prostorovou převést na úlohu rovinnou. Mezi skupinou první a druhou není v podstatě rozdíl; uvádíme-li tyto skupiny odděleně, činíme tak proto, že každá z nich nezávisle dala vzniknouti různým početním nebo grafickým metodám, i když jejich analytická formulace vede na stejné rovnice.



Obr. 1.

## 2. První skupina početních a grafických metod.

Analytická teorie naší úlohy jest velmi jednoduchá. Vychází z těchto dat: Buďtež dány tři naslouchací stanice  $S(0, 0)$ ,  $S_1(x_1, 0)$ ,  $S_2(x_2, y_2)$  a buďtež změřeny dráhové rozdíly  $t_1 = \overline{NS_1} - \overline{NS}$ ,  $t_2 = \overline{NS_2} - \overline{NS}$  (obr. 1); bod  $N$  jest místo, v němž nastal akustický rozruch. Při tom současně zavádíme vhodnou jednotku délkovou. Chronografy totiž můžeme ještě přesně změřiti časovou tercií (= 0,01 sec); tercií délkovou pak nazveme dráhu, kterou urazí zvuk za tercií časovou. Čas měřený v terciích časových budeme značiti  $\tau$ , délkou měřenou v terciích délkových označíme  $t$ . Zavedme dále označení  $\overline{SS_1} = n_1$ ,  $\overline{SS_2} = n_2$ , tedy  $n_1 = x_1$ ,  $n_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ .

Došla-li zvuková vlna k naslouchateli  $S_1$  za čas  $\tau_1$ , dojde vlnění k naslouchateli  $S_2$  (jak patrné z obr. 1) za čas  $\tau_2 = \tau_1 + i$ , čili o časový rozdíl  $i$  později. Pozorovatel  $S_2$  jest od místa rozruchu dále o  $\overline{NS}_2 - \overline{NS}_1 = ci$  než pozorovatel  $S_1$ ; při tom  $c$  — jako obvykle — značí rychlost šíření zvukových vln. Změřením časového rozdílu  $i$  bude tudíž možno určití rozdíl vzdáleností  $ci$ . Z definice kuželoseček je známo, že rozdíl vzdáleností se vyskytuje u hyperboly.

Po tomto výkladu můžeme přistoupiti k *analytické formulaci* úlohy. Uvažujme dvě dvojice bodů  $(S, S_1)$ ,  $(S, S_2)$ . Rozdíly vzdáleností, o nichž jsme právě mluvili, označme pro tyto dvojice resp.  $ci_1 = t_1$ ,  $ci_2 = t_2$ . Geometrické místo bodů, jejichž rozdíl vzdáleností od dvou pevných bodů  $S, S_1$  jest  $t_1$ , jest hyperbola  $H_1$ , jejíž ohniska leží v obou naslouchacích stanicích a jejíž poloosy  $a_1, b_1$  jsou dány rovnicemi

$$2a_1 = t_1, \quad a_1^2 + b_1^2 = (\frac{1}{2}n_1)^2,$$

z nichž plyne

$$a_1 = \frac{1}{2}t_1, \quad b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{n_1^2 - t_1^2}.$$

Analogicky pro body  $S, S_2$  docházíme k hyperbole  $H_2$ , pro níž

$$a_2 = \frac{1}{2}t_2, \quad b_2 = \frac{1}{2}\sqrt{n_2^2 - t_2^2}.$$

Průsečíky obou hyperbol  $H_1, H_2$  (zvaných někdy hyperboly cíle) určují polohu neznámého zvukového zdroje  $N$ . Úloha je víceznačná (obecně čtyřznačná) jen zdánlivě; poloha zdroje je mezi všemi průsečíky docela určitá, je to ten bod, z něhož vlnění dojde do bodu  $S$  nejdříve. Ukážeme ostatně v dalším, že počet „praktických“ průsečíků je nižší než čtyři.

K dokonalému určení polohy zdroje stačí tedy podle předcházejícího tři naslouchatelé. Ve skutečnosti jest jich však více (zvukočeta pracuje s 5 až 7 stanicemi), jejich hyperboly slouží ke kontrole. V praxi se vyskytující případy vedou totiž k hyperbolám, které se protínají pod velmi ostrým úhlem; sestrojujeme tedy další hyperboly, jdoucí zdrojem  $N$ , abychom stanovili polohu zdroje pokud možno nejpřesněji.

Na základě obecných zásad, které jsme právě uvedli, jsou vypracovány čtyři metody, o kterých pojednáme podrobněji.

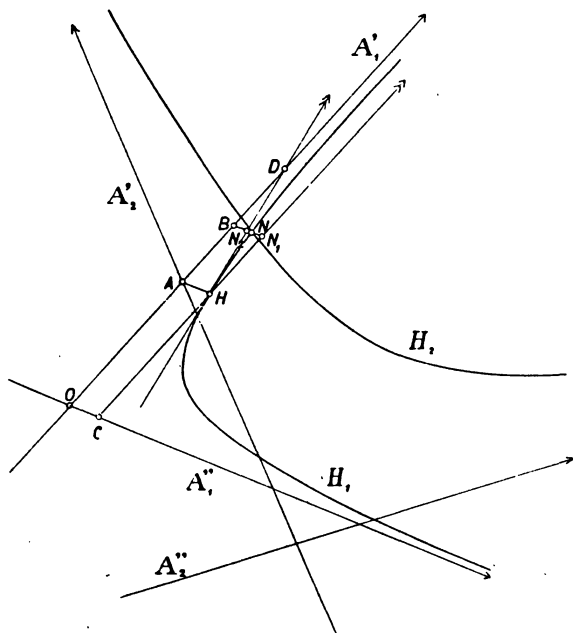
I. *Přesná konstrukce grafická.* Známe-li přesně polohu naslouchacích stanic, známe také po změření časových rozdílů určující prvky obou hyperbol (a hyperbol kontrolních). Zobrazíme-li tyto křivky, dává nám příslušný průsečík polohu zdroje.

II. *Přesné řešení analytické.* Rovnice obou hyperbol  $H_1, H_2$ , vztažené k jejich souřadným soustavám (obr. 1), jsou

$$H_1 \equiv \frac{(x - \frac{1}{2}n_1)^2}{(\frac{1}{2}t_1)^2} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}(n_1^2 - t_1^2)} - 1 = 0, \quad (1)$$

$$H_2 \equiv \frac{\bar{x}^2}{(\frac{1}{2}t_2)^2} - \frac{\bar{y}^2}{\frac{1}{4}(n_2^2 - t_2^2)} - 1 = 0; \quad (2)$$

transformujeme-li rovnici (2) do souřadné soustavy hyperboly  $H_1$ ,



Obr. 2.

obdržíme rovnici tvaru

$$H_2 \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (2')$$

Řešením rovnic (1), (2') nalezneme zdroj  $N(x, y)$ . Toto řešení vede na rovnici čtvrtého stupně, dává tedy výsledky prakticky neupotřebitelné i tehdy, když volíme naslouchatelný ve zvláštní poloze.

Proto často, je-li zdroj  $N$  daleko, nahraží se hyperboly s dostačující přesností asymptotami (obr. 2). Hyperbolám  $H_1, H_2$ , které přísluší dráhovým rozdílům  $t_1, t_2$ , náleží asymptoty s rovnicemi

$$A_1 \equiv y + (x - \frac{1}{2}n_1) \frac{\sqrt{n_1^2 - t_1^2}}{t_1} = 0,$$

$$A_2 \equiv y - \frac{1}{2}x_2 - (x - \frac{1}{2}x_2) \frac{t_2 y_2 - x_2 \sqrt{n_2^2 - t_2^2}}{t_2 x_2 - y_2 \sqrt{n_2^2 - t_2^2}} = 0; \quad (3)$$

při tom z každé dvojice asymptot uvažujeme právě tu, která má pro úlohu význam (obr. 1). Hledaný zdroj  $N$  je přibližně určen rovnicemi (3); ale i zde je třeba uvést, že vzorce takto získané jsou prakticky téměř neupotřebitelné, dávající složité výrazy, i když tři uvažované stanice leží v přímce.

Komplikované výsledky a tím způsobené počtářské obtíže, jak vyplynuly z volby kartézské soustavy, odstranil ppl. *Gebauer*,<sup>2)</sup> zvoliv za základ soustavu polární. Naznačíme zde stručně jeho řešení. Zvolíme-li za pól soustavy stanici  $S$ , za polární osu směr  $SS_1$ , a označíme-li  $\sphericalangle S_1SS_2 = \alpha$ , jsou rovnice obou hyperbol  $H_1, H_2$  v souřadnicích  $\varrho, \varphi$

$$\varrho = \frac{p_1}{1 - \varepsilon_1 \cos \varphi} \cdot \varrho = \frac{p_2}{1 - \varepsilon_2 \cos (\varphi - \alpha)}. \quad (4)$$

Zde značí  $2p$  parametr ( $2p = 2b^2/a$ ),  $\varepsilon$  numerickou výstřednost ( $\varepsilon = e/a$ ,  $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ ), t. j.

$$p_1 = \frac{n_1^2 - t_1^2}{2t_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{n_1}{t_1}; \quad p_2 = \frac{n_2^2 - t_2^2}{2t_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{n_2}{t_2}.$$

Pro průsečík obou hyperbol (4), t. j. pro zdroj  $N$ , je splněna rovnice

$$\frac{p_1}{1 - \varepsilon_1 \cos \varphi} = \frac{p_2}{1 - \varepsilon_2 \cos (\varphi - \alpha)}, \quad (*)$$

z níž po malé úpravě plyne

$$\cos \varphi = \frac{(p_1 - p_2)(p_2 \varepsilon_1 - p_1 \varepsilon_2 \cos \alpha) \pm p_1 \varepsilon_2 \sin \alpha \cdot \Phi}{p_2^2 \varepsilon_1^2 + p_1^2 \varepsilon_2^2 - 2p_1 p_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \alpha},$$

kde

$$\Phi = \sqrt{p_2 \varepsilon_1^2 + p_1 \varepsilon_2^2 - (p_1 - p_2)^2 - 2p_1 p_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \alpha}.$$

Také tento vzorec se nehodí k vyčíslení. Položme však  $\alpha = 0$ ; obdržíme ihned

$$\cos \varphi = \frac{p_1 - p_2}{p_1 \varepsilon_2 - p_2 \varepsilon_1},$$

z rovnice (\*) plyne

$$\varrho = \frac{p_1 \varepsilon_2 - p_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1},$$

<sup>2)</sup> Gebauer, Vzorce pro početní řešení zvukoměříčského úkolu, *Voj. tech. zprávy*, 2 (1925), 90—98; tato studie je zajímavá tím, že představuje původní matematické pojetí zvukoměříčské úlohy a je pravděpodobně jediná svého druhu.

kterýmiž jednoduchými vzorci je zdroj  $N$  určen. Jednoduché vzorce obdržíme také pro volbu  $n_1/n_2 = k$ , kde  $k > 0$  je číslo celé. Poznamenejme ještě, že tato speciální volba dává výsledky neurčitě, je-li zdroj  $N$  na přímce bodů  $S, S_1, S_2$ .

III. *Přibližné řešení grafické.* Nejstarší způsob přibližného grafického řešení jest rýsování plánů hyperbolových. Pro každou základnu (dvě sousední stanice, které jsou zároveň ohnisky jim příslušné hyperboly) jest sestrojen svazek hyperbol jdoucích po časových rozdílech 20 tercií. Do takto připravených plánů se pak interpolačně vkreslují hyperboly odpovídající skutečně naměřeným rozdílům. Tato poslední fáze (vyhodnocení) dá se provést na připravených plánech velmi rychle, nevyvážá však nepřesnost, kterou je tato metoda zatížena. Požadavek zvýšení přesnosti byl asi hlavním důvodem, proč od tohoto způsobu se upustilo.

IV. Přešlo se proto k vyhodnocování pomocí plánů asymptotových. Jejich předností bylo, že příprava plánu vyžádala si mnohem kratší doby než u plánů hyperbolových a hlavně, že značně vzrostla přesnost vyhodnocení. Princip je jednoduchý: místo svazku hyperbol konstruujeme pouze jejich asymptoty. Zdroj pak můžeme předpokládati v blízkosti průsečíku odpovídajících asymptot. V okolí tohoto bodu pak nahradíme příslušné části hyperbol přímkami.

Pro praktické účely byl nepřesný a zdlouhavý i tento způsob. Všeobecně se ujala metoda používající plánů tangentských, kde hyperbola v okolí zdroje je nahrazena její tečnou. Její teorie je velmi jednoduchá a zajímavá; matematický základ k ní položil *Austerlitz* roku 1918. Pro nedostatek místa nemůžeme zde uvésti více<sup>3)</sup>; abychom poznali alespoň přednost metody tangentské proti asymptotové, ukážeme si, jak velikými relativními chybami jsou obě metody zatíženy. Přirozeně budeme uvažovati jen ty chyby, které vyplývají z toho, že jsme hyperbolu v okolí zdroje nahradili přímkou a nebudeme přihlížeti k chybám rázu fyzikálního a pod.

Bod  $A$  (obr. 2) nechť nám značí průsečík dvou asymptot  $A'_1, A'_2$ , které přísluší hyperbolám  $H_1, H_2$  (t. j. dráhovým rozdílům  $t_1, t_2$ ) v soustavě stanic  $S, S_1, S_2$ . Vztáhneme-li hyperbolu  $H_1$  k asymptotám jako (kosoúhlým) osám souřadným, je její rovnice (v souřadnicích  $x, y$ )

$$xy = \frac{1}{4}e^2. \quad (5)$$

Označme  $H$  bod na hyperbole  $H_1$  takový, že  $HA \parallel A'_1$ . Pak při přibližném grafickém řešení nahrazujeme v okolí zdroje  $N$  hyperbolu buď rovnoběžkou s asymptotou  $HN_1$  (řešení na plánu asympto-

<sup>3)</sup> S dostačující podrobností jest *Austerlitzova* teorie uvedena v *Gebauerově Aplikované matematice pro vojsko, I, 1927, str. 102—108.*

tové) nebo tečnou  $HN_2$  v bodě  $H$  (řešení na plánu tangetovém). Chyby při obou řešeních vzniklé měříme velikostí úseček  $NN_1$  resp.  $NN_2$ .

V prvním případě jest  $NN_1 = BN_1 - BN$ . Z rovnice (5) však plyne

$$BN_1 = OC = \frac{1}{4} \frac{e^2}{OA}, \quad BN = \frac{1}{4} \frac{e^2}{OB}.$$

Píšme nyní  $OA = k \cdot e$  ( $k > 0$  dané číslo plynoucí z volby naslouchacích stanic) a zaveďme označení  $AB = \Delta$ , pak jest

$$NN_1 = \frac{1}{4} e^2 \left[ \frac{1}{k \cdot e} - \frac{1}{k \cdot e + \Delta} \right];$$

tudíž

$$NN_1 = ch_1 = \frac{e^2 \Delta}{4k \cdot e (k \cdot e + \Delta)} < \frac{\Delta}{4k^2}. \quad (6)$$

V druhém případě máme nejprve z podobných trojúhelníků  $AHD$  a  $BN_2D$

$$BN_2 = \frac{AH \cdot BD}{AD},$$

a poněvadž jest

$$AH = OC = \frac{1}{4} \frac{e^2}{OA} = \frac{e}{4k}, \quad BD = AD - AB = OA - \Delta = k \cdot e - \Delta,$$

neboť

$$AD = OA = k \cdot e$$

(jak plyne ze známé vlastnosti hyperboly), tedy

$$BN_2 = \frac{k \cdot e - \Delta}{4k^2}.$$

Je dále

$$BN = \frac{1}{4} \frac{e^2}{OB} = \frac{1}{4} \frac{e^2}{OA + AB} = \frac{e^2}{4(k \cdot e + \Delta)},$$

tudíž

$$NN_2 = BN - BN_2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{e^2}{k \cdot e + \Delta} - \frac{k \cdot e - \Delta}{k^2} \right],$$

nebo jinak

$$NN_2 = ch_2 = \frac{\Delta^2}{4k^2 (k \cdot e - \Delta)} < \frac{\Delta^2}{4k^3 \cdot e}. \quad (7)$$

Je-li veličina  $\Delta$  vůči  $k \cdot e$  dostatečně malá, plyne z výrazů a (7), kde pak můžeme znaménko nerovnosti nahradit rovností,

$$ch_1 = \frac{\Delta}{4k^2}, \quad ch_2 = \frac{\Delta^2}{4k^3 \cdot e}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{ch_1}{ch_2} = \frac{k \cdot e}{\Delta},$$



poměr na levé straně je značně veliký, tedy  $ch_2$  je značně menší než  $ch_1$ .

### 3. Druhá skupina početních a grafických metod.

Jako v případě početní skupiny předcházející, tak i zde docházíme k jednoduché matematické teorii, jejíž výsledky při jisté speciální volbě stanic lze dobře použít. Data, ze kterých vycházíme zde, jsou táž, jako ve skupině předcházející.

Aby zvuk dospěl ze zdroje  $N(\xi, \eta)$  do ústředny  $S$ , potřeboval neznámou dobu  $\tau$ , tedy kruhová vlna jdoucí bodem  $S$  má rovnici (v souřadnicích  $x, y$ )

$$K \equiv (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - t^2 = 0, \text{ kde } t = c \cdot \tau,$$

splňující podmínku

$$\xi^2 + \tau^2 - t^2 = 0. \quad (1)$$

Stejným způsobem nalezneme rovnice kruhových vln  $K_1, K_2$ , jdoucích body  $S_1, S_2$ .

$$K_1 \equiv (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - (t + t_1)^2 = 0, \text{ kde } t_1 = c \cdot i_1 = c(\tau + \tau_1),$$

$$K_2 \equiv (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - (t + t_2)^2 = 0, \text{ kde } t_2 = c \cdot i_2 = c(\tau + \tau_2);$$

tyto kružnice tedy splňují podmínky

$$(\xi - x_1)^2 + \eta^2 - (t + t_1)^2 = 0, \quad (2)$$

$$(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2 - (t + t_2)^2 = 0. \quad (3)$$

(Při tom  $\tau_1, \tau_2 \geq 0$ , a tedy i  $t_1, t_2 \geq 0$  podle toho, zda ústředna  $S$  leží vzhledem ke zdroji  $N$  blíže nebo dále než naslouchatelný  $S_1, S_2$ .)

Rovnice (1), (2), (3) v souřadnicích  $\xi, \eta$  představují tři kružnice o středech  $S, S_1, S_2$ , které procházejí hledaným zdrojem  $N$ ; úloha je tedy převedena na nalezení průsečíků dvou kružnic.

Na základě obecných zásad, které jsme uvedli, jsou vypracovány tři metody, o kterých pojednáme podrobněji.

I. *Přesné řešení analytické* vychází ze tří rovnic (1), (2), (3). Za tím účelem odečteme rovnice (2) a (3) od rovnice (1), obdržíme tak spolu s rovnicí (1) soustavu

$$\begin{aligned} 2\xi x_1 - x_1^2 &= -2t_1 t - t_1^2, \\ 2\xi x_2 - x_2^2 + 2\eta y_2 - y_2^2 &= -2t_2 t - t_2^2, \\ \xi^2 + \eta^2 &= t^2. \end{aligned}$$

Z první z těchto rovnic vypočteme  $t$  a dosadíme do zbývajících dvou, obdržíme po malé úpravě

$$\begin{aligned} 2(x_1 t_2 - x_2 t_1) \xi - 2y_2 t_1 \eta - t_2 x_1^2 - t_1 t_2 (t_2 - t_1) + t_1 (x_2^2 + y_2^2) &= 0, \\ \frac{(\xi - \frac{1}{2} x_1)^2}{(\frac{1}{2} t_1)^2} - \frac{\eta^2}{\frac{1}{4} (x_1^2 - t_1^2)} - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

První z těchto rovnic představuje přímku, druhá hyperbolu, která jest identická s hyperbolou 2, (1). Tím jsme ale dokázali, že obě hyperboly  $H_1, H_2$  z odst. 2 protínají se nejvýše ve dvou reálných bodech; přímka daná první z předcházejících rovnic je jejich spojnicí. (Viz obr. 1.) Zároveň jsme převedli úlohu čtvrtého stupně, kterou je nalezení průsečíků dvou kuželoseček, na úlohu stupně druhého, nalezení průsečíků přímky s kuželosečkou.

Poznamenejme ještě, že řešení soustavy (4) vede k použitelným vzorcům jen tehdy, máme-li speciální polohu naslouchacích stanic. Ve zmíněném pojednání uvádí ppl. *Gebauer* řadu takových případů; dále uvažuje případy, kdy se jedná o více stanic než tři. Tak na př. pro čtyři stanice  $S(-n, -n), S_1(-n, n), S_2(n, -n), S_3(n, n)$  a změřené doby  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  obdržíme velmi jednoduché vzorce, které se hodí k vypočítání, ve tvaru

$$\xi = \frac{t_2(t_1 - t_2 + t_3)(t_1 - t_3)}{4n(t_1 + t_2 - t_3)}, \quad \eta = \frac{t_1(t_1 - t_2 - t_3)(t_3 - t_2)}{4n(t_1 + t_2 - t_3)}$$

II. *Přesné řešení grafické* značí podstatné zjednodušení v tom ohledu, že je lze provést pouze rýsováním přímek a kružnic, tedy čar, které můžeme rýsovat s největší dosažitelnou přesností.

Představme si totiž, že každý z bodů  $N, S_1, S_2$  má svůj vlastní čas a v každém z těchto bodů že nastal akustický rozruch. Tyto „časy staniční“ nechť jsou takové, že za jistý „čas absolutní“ rozruch v bodě  $N$  dosáhl kružnice poloměru  $t$ , rozruchy v bodech  $S_1, S_2$  kružnic poloměrů  $t_1, t_2$ . Z toho plyne především, že kružnice  $K^*$  mající střed v bodě  $N$  prochází bodem  $S$ , neboť její poloměr je právě  $t$ , a kružnice  $K_1^*, K_2^*$ , mající středy v bodech  $S_1, S_2$  dotýkají se kružnice  $K^*$  v bodech  $S', S''$ , neboť jejich poloměry  $t_1, t_2$  splňují vztahy

$$|NS_1 - NS'| = |NS_1 - NS''| = t_1, \quad |NS_2 - NS'| = |NS_2 - NS''| = t_2.$$

Sestrojíme-li tedy kružnici  $K^*$ , která prochází bodem  $S$  a dotýká se kružnic  $K_1^*(S_1; t_1), K_2^*(S_2; t_2)$ , určuje svým středem polohu zdroje  $N$ .

V tomto tvaru jsme tedy převedli zvukoměřičskou úlohu na jednu z úloh Apolloniových. Tuto úlohu lze řešit dvojím způsobem: pomocí kruhové inverze<sup>4)</sup> nebo, elementárněji, možno ji převést na úlohu jednodušší — sestrojiti kružnici, jež se dotýká jiné kružnice dané a prochází dvěma danými body.<sup>5)</sup> Úloha jest obecně čtyřznačná; snadno však rozhodneme, které řešení má pro nás význam.

<sup>4)</sup> Novotný, Grafické řešení zvukoměřičského úkolu, Voj. tech. zprávy, 5 (1928), 55—59.

<sup>5)</sup> Rychlý, Grafické řešení zvukoměrného problému v prostoru, Voj. tech. zprávy 6 (1929), 248—251.

**Poznámka.** K tomuto konstruktivnímu pojetí zvukoměříčského úkolu mohli jsme přirozeně dospěti také v první skupině početních metod. Ze známé vlastnosti hyperboly totiž plyne, že hyperbola  $H_1$  daná rovnicí 2, (1), je geometrickým místem středů kružnic, které procházejí bodem  $S$  a dotýkají se kružnice  $K_1^*(S_1; t_1)$ , stejně, že hyperbola  $H_2$  daná rovnicí 2, (2), je geometrickým místem středů kružnic, které procházejí bodem  $S$  a dotýkají se kružnice  $K_2^*(S_2; t_2)$ . Jejich průsečík  $N$  je tedy středem kružnice  $K^*$ , jež prochází bodem  $S$  a dotýká se současně obou kružnic  $K_1^*$ ,  $K_2^*$ .

III. *Přibližné řešení grafické* podali Cotton a Weiss, pokládajíce (pro krátké základny  $S_1S_2$ ) tu část kruhové vlny, která prochází stanicemi, za přímkou. Přesný analytický podklad této přibližné metody může si čtenář nalézt sám.

#### 4. Třetí skupina početních a grafických metod.

Do této skupiny zařadíme metody, které řeší zvukoměříčskou úlohu prostorově. V prostoru k určení polohy zvukového zdroje  $N$  je potřeba nejméně čtyř stanic  $S, S_1, S_2, S_3$ , a tedy změření tří dráhových rozdílů  $t_1, t_2, t_3$ . Soustavu souřadnou volme tak, aby bylo

$$S(0, 0, 0), S_1(x_1, y_1, 0), S_2(x_2, 0, 0), S_3(x_3, y_3, z_3); N(\xi, \eta, \zeta).$$

Rovnice kulových vlnoploch jsou tedy

$$K_1 \equiv (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - t^2 = 0, \\ K_{i+1} \equiv (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - (t + t_i)^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Těmto rovnicím vyhovují po řadě body  $S, S_1, S_2, S_3$ ; napíšeme-li si příslušné podmínky, nalezneme v souřadnicích  $\xi, \eta, \zeta$  čtyři koule středů  $S, S_1, S_2, S_3$ , jež všechny jdou hledaným zdrojem  $N$ , řešením nalezneme pak souřadnice zdroje  $N$ . Ukazuje se, že tuto úlohu lze převést na následující: stanoviti průsečíky přímky s rotačním hyperboloidem dvojdílným, tedy na úlohu analyticky jednoduchou, ale dávající přesto výsledky prakticky nevhodné. Tato metoda je prostorovou analogií druhé skupiny.

Polohu zdroje v prostoru lze také určit jako průsečík tří rotačních hyperboloidů, jejichž rotační osy jsou  $SS_1, SS_2, SS_3$  — t. j. osy naší souřadné soustavy. I tento postup, jež je prostorovou analogií první skupiny, dává výsledky prakticky nevhodné. Tyto výsledky se nezjednoduší podstatně ani tehdy, užijeme-li analogicky k úloze rovinné polárních ohniskových rovnic pro meridiánové hyperboly uvažovaných rotačních hyperboloidů.

Posléze uveďme, že zvukoměříčskou úlohu v prostoru lze převést rovněž na následující úlohu obdobnou ke zmíněné Apolloniově úloze v rovině: Sestrojiti kouli  $K^*$ , která se dotýká tří daných koulí  $K_1^*(S_1; t_1), K_2^*(S_2; t_2), K_3^*(S_3; t_3)$  a prochází daným bodem  $S$ ; středem této koule je dána poloha zdroje  $N$ . I této úloze lze dáti tvar jednodušší — sestrojiti kouli,

kteřá prochází třemi danými body a dotýká se dané koule — skutečné řešení lze provést pomocí deskriptivní geometrie na př. v promítání kótovaném.

Dosud nastíněné metody prostorového řešení jsou matematicky zcela *přesné*. Ve skutečných v praxi přicházejících případech lze většinou výškové rozdíly zanedbat; chceme-li však přece vzítí je v úvahu, postupujeme takto: Výškový rozdíl mezi stanicí a zdrojem budiž  $v$ , prostorová jejich vzdálenost  $d$ , ortogonální průmět její  $d'$ . Pak je zřejmě

$$d = \sqrt{d'^2 + v^2} = d' \left( 1 + \frac{v^2}{d'^2} \right)^{\frac{1}{2}};$$

rozvineme-li výraz na pravé straně podle Newtonovy poučky a omezíme-li se na první dva členy, máme s dostačující *přibližností*

$$d = d' + \frac{v^2}{2d'} \quad (1)$$

Výraz  $v^2/2d'$  nám tedy udává, o co musíme změnití vodorovnou vzdálenost, abychom dostali prostorovou dráhu zvuku. Zároveň na základě výrazu (1) *převádíme* prostorovou úlohu na rovinnou.

## 5. Opravy zvukoměřičských hodnot.

Zvukoměřičskými hodnotami nazveme všechny veličiny, které vyžaduje řešení zvukoměřičského úkolu.

Zvukoměřičství je nejvýkonnější prostředek ku zjištění polohy zvukových zdrojů, který doposud známe. Jako každé měření, je zatíženo chybami a nepřesnostmi. Tyto můžeme rozdělití do čtyř skupin:

1. Chyby vzniklé vyměřováním stanic.
2. Chyby vzniklé v konstrukcích plánů a v jejich vyhodnocení.
3. Nepřesné měření a nedostatečná znalost meteorologických vlivů.
4. Chyby ve strojovém zařízení.

Chyby skupiny první lze snížití použitím přesných triangulačních sítí a vteřinových teodolitů. Chybám druhé skupiny se vyhýbáme pečlivou prací a kontrolou každého výkonu. Ve skupině čtvrté přichází hlavně v úvahu správný chod chronometru. O skupině třetí pojednáme v následujícím podrobněji.

Studiem závažnosti zmíněných chyb a nepřesností, studiem jejich skládání a působení na konečný výsledek se zabývá *chybová teorie zvukoměřičství*.<sup>6)</sup> Z této teorie plyne jako nejdůležitější následující výsledek udávající vodítko pro volbu naslouchací

<sup>6)</sup> Maňř, Pokus o chybovou teorii zvukoměřičství, Voj. tech. zprávy 9 (1932), 217—227.

soustavy: Naslouchací stanice mají ležeti na kruhu, jehož střed leží v prostoru, kde hledáme zdroj. Základny stanic mají býti asi 2000 m dlouhé.

Vrátíme se ke třetí skupině chyb, které jsou po stránce fyzikální nejzajímavější. Je zřejmé, že zjištěné časové rozdíly jsou znehodnoceny vlivem různých atmosférických podmínek a nutno je pro předem připravené plány opravit na hodnoty, jež by vznikly za normálních podmínek, pro které je plán zhotoven.

Opravu časových rozdílů provádíme na teplotu vzduchu, jeho vlhkost a vítr, k tomu přistupuje oprava výšková.?)

I. *Oprava teploty.* Vliv teploty  $\vartheta$  na rychlost zvuku je vyjádřen známým vzorcem<sup>a)</sup>

$$c_{\vartheta} = c_0 \sqrt{1 + \frac{\vartheta}{273}};$$

rovineme-li odmocninu na pravé straně podle Newtonovy poučky a omezíme-li se na první dva členy, obdržíme s dostačující přesností

$$c_{\vartheta} = c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\vartheta}{273}\right) = c_0 + 0,6 \vartheta,$$

při tom  $c_0 = 331,7$  značí zřejmě rychlost zvuku při teplotě  $\vartheta = 0^{\circ} \text{C}$ .

Byl-li tedy při teplotě  $\vartheta$  naměřen časový rozdíl  $i_{\vartheta}$ , nalezneme opravu časového rozdílu takto: Dráhové rozdíly  $c_0 i_0, c_{\vartheta} i_{\vartheta}$  splňují vztah

$$c_0 i_0 = c_{\vartheta} i_{\vartheta}, \text{ t. j. } i_0 = \frac{c_{\vartheta}}{c_0} i_{\vartheta}$$

(neboť vzájemná vzdálenost stanic se nemění), je tedy oprava časového rozdílu

$$i_0 - i_{\vartheta} = \frac{i_{\vartheta}}{c_0} (c_{\vartheta} - c_0) = \frac{i_{\vartheta}}{331,7} 0,6 \vartheta = 0,0018 \vartheta i_{\vartheta};$$

opravený časový rozdíl má tudíž hodnotu

$$i_0 = i_{\vartheta} (1 + 0,0018\vartheta). \quad (1)$$

II. *Oprava vlhkosti.* Poněvadž vlhkost vzduchu jest úměrná teplotě, lze vliv vlhkosti vzduchu zahrnouti ihned do opravy na teplotu a to tak, že teplotu  $\vartheta$  ve vzorci (1) zvýšíme na teplotu  $\vartheta^*$  podle vzorce

$$\vartheta^* = \vartheta + 0,134e.$$

Při tom značí  $e$  okamžitý absolutní tlak vodních par v mm sloupce

<sup>?)</sup> Podrobný výklad nalezne čtenář v knize Švejka, Učebnice fyziky pro vojenské akademiky, I, 1933 (lit.), str. 218—225.

<sup>a)</sup> Novák, Fyzika, I, 1929, str. 325 n.

Hg, který odečítáme z tabulek pro zjištěnou vlhkost relativní. Časový rozdíl, opravený s ohledem na teplotu a vlhkost, je tedy dán vztahem

$$i_0 = i_s (1 + 0,0018\vartheta^*) = i_s [1 + 0,0018 (\vartheta + 0,134e)]. \quad (2)$$

III. *Oprava větrná.* Účinek větru lze si představit tak, že větrem postupujícím ve směru šíření zvukové vlny rychlost zvuku se zvětšuje a obráceně. Zpravidla směr šíření zvukové vlny k naslouchateli svírá se směrem větru jistý úhel  $\varphi$ ; větrná oprava je pak dána na př. pro stanice  $S, S_1$  vřazem

$$\overline{SS_1} \cdot \frac{w}{c^2} \cos \varphi,$$

kde  $w$  značí rychlost větru. Odvození tohoto vztahu zde nepodáváme.

Uveďme ještě, že oprava je největší, vane-li vítr ve směru základny  $SS_1$  ( $\varphi = 0, \cos \varphi = 1$ ), je nejmenší (nulová) v případě, že směr větru je na základnu kolmý ( $\varphi = 90^\circ, \cos \varphi = 0$ ). Smysl opravy je kladný, je-li táž stanice zachycena větrem i zvukem dříve, než stanice druhá, při nesouhlasu je oprava záporná.

IV. O *opravě výškové* jsme mluvili již v odst. 4. Pokud je výškový rozdíl menší než 100 m, výškovou opravu zanedbáváme; stejně však, pokud je to možné, zřizujeme stanice ve stejné nadmořské výšce.

Dosud jsme se zabývali takovými vlivy, jejichž velikost s dostačující přesností jsme mohli vystihnouti matematicky. Snadno nahlédneme, že existuje kromě těchto vlivů ještě řada náhod a okolností, které mají rovněž vliv na zvukoměříčské hodnoty a jejichž závažnost nemůžeme vystihnouti matematicky, nemajíce o nich dostatečných zkušeností. Jako příklad uveďme pouze deformace vlnoplochy, jež jsou způsobovány pokrytostí terénu a jeho rozličnými nepravidelnostmi.

## 6. Závěr.

Vidíme, uvážíme-li ještě jednou výhody a nevýhody obou základních metod, početní a grafické, že je velmi nesnadno rozhodnouti se pro některou z nich výlučně.

Početní řešení zvukoměříčského úkolu vyžaduje, aby stanice byly umístěny na *předem* stanovená místa, třebaš by pravděpodobná poloha zdroje ukazovala na jiné, výhodnější, umístění. Početní řešení vyžaduje dále přehledný, rovinný terén, což je podmínka ve skutečnosti velmi těžko splnitelná. Jistě však je toto řešení, pokud se omezujeme na matematickou stránku, přesnější než grafické. Na druhé straně však toto řešení vychází z předpokladů, které nejsou v praxi tak dokonale splněny; vzpomeňme si na př. jen na deformaci kulových vln a na vlivy atmosférické.

Naproti tomu metody grafické (zejména vyhodnocování metodou *Austerlitzovou*) vyhovují po stránce pracovní. Stanice volíme podle předběžného názoru pokud možno nejvhodněji a *pro tyto stanice* připravíme (tangentové) plány. Zvukoměřičská soustava pak pracuje objektivně: na proužku obdržíme obraz veškerého zvukového dění na všech stanicích, stanovíme (je-li to možné) zvukový rozruch, iniciovaný tímž zdrojem, a vyhodnotíme na plánu časové rozdíly. Přibližnost grafického řešení nám jistě kompenzuje dělostřelecký rozptyl.

Za nepříznivých podmínek nevyhneme se jistě při obou metodách, matematické a grafické, omylům při hledání záznamů koherentních. Tu zkoušíme pak různé hodnoty časových rozdílů, kritériem jejich správnosti je společný průsečík odpovídajících hyperbol. Snad by bylo možno v tomto ohledu spojití metodu matematickou s grafickou tak, aby buďto docela odpadlo nebo aspoň se zjednodušilo předběžné zkoušení.<sup>9)</sup>

Přirozeně, že kritika disciplíny vojenské nemůže být vedena pouze z teoretického stanoviska. Poslední slovo zde může mít jen vojenský praktik, jemuž toto odvětví má umožňovat jeho práci. A tu vystupují nové požadavky: vedle dosavadního požadavku spolehlivosti (přesnosti) chceme i rychlost. A pak docházíme k závěru, že „lepší“ metodou je grafická, zejména pro válku pohybovou, matematická metoda mohla by snad mít význam pro válku posícní.

Směr vývoje zvukoměřictví je tedy pravděpodobně tento: *objektivní metody s grafickým vyhodnocováním zvukových zdrojů.*

---

<sup>9)</sup> Sousedík, Grafické řešení zvukoměřičského úkolu, Voj. tech. zprávy 3 (1926), 111—115; Pokorný, Grafické či početní řešení zvukoměřičského úkolu, Voj. tech. zprávy 3 (1926), 211—222.