Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

Z analytické geometrie roviny

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 7 (1878), No. 4, 248--252

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122881

$$-(b^2+a^2-c^2)+2ab\cos\gamma=0.$$

Řešíme-li tuto rovnici podlé c^2, obdržíme [3])

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma, \tag{8}$$

známou to větu Carnotovu, *rovnicí* to vyjádřenou třetí obecnou vlastnost trojúhelníku, že je jedna strana menší než součet obou ostatních stran.

Tím jsme poznali, že soustavou (1) vyjádřeny jsou tři obecné vlastnosti trojúhelníku (3), (5), (8), jimž strany i úhly trojúhelníku vyhověti musí; známe-li tedy tři částky (za příčinou rovnice (3) musí aspoň jedna z těch tří částek býti stranou), můžeme trojúhelník řešiti t. j. pomocí soustavy (1) neb odvozené [(3), (5), (8)] můžeme i ostatní částky trojúhelníku vypočítati nebo geometricky řečeno, z tří určovacích částí trojúhelníku můžeme trojúhelník sestrojiti.

Z analytické geometrie roviny.

Napsal

prof. Dr. **K. Zahradník** v Záhřebě.

V následujících řádkách uvádíme řešení dvou známých úloh geometrie prostorné s několika poznámkami, jež snad počátečníkovi budou vhodným cvičením. Podotknouti sluší, že jsme upotřebili označení

$$a_k=\cos\alpha_k$$

t. j. píšeme latinské písmeno za kosinus úhlu řeckým písmenem označeného.

I.

„Dané jsou dvě mimoběžky P, P_1; máme určiti rovinu, kteráž jdouc přímkou jednou, je rovnoběžná s přímkou druhou."

Označíme rovinu, položenou přímkou P [P_1] rovnoběžně s přímkou P_1 [P], písmenem R, [R_1]. Roviny R, R_1 jsou rovno-

---

[3]) Podobně bychom obdrželi, vyloučivše jednou $\cos\beta$, $\cos\gamma$, po druhé $\cos\gamma$, $\cos\alpha$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta.$$

běžné a jejich odlehlost je nejkratší vzdálenost daných mimoběžek P, P_1.

Rovnice daných přímek *) jsou

$$P\left\{\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}\right.$$

$$P_1\left\{\frac{x-x''}{a_1}=\frac{y-y''}{b}=\frac{z-z''}{c_1}\right. \qquad (1)$$

K vyjádření roviny R volme normalní tvar rovnice

$$R\equiv lx+my+nz-p=0\,.$$

Rovina R prochází přímkou P, tím i bodem M' té přímky, pročež je

$$l(x-x')+m(y-y')+n(z-z')=0. \qquad (2)$$

Jest však $p\perp P$, a poněvadž $R\,||\,P_1$, je i $p\,||\,P'$; tím máme [1])

$$\left.\begin{aligned} al+bm+cn&=0,\\ a_1l+b_1m+c_1n&=0,\end{aligned}\right. \qquad (3)$$

a tudíž je

$$l:m:n=(bc_1):(ca_1):(ab_1).$$

Dosadíme-li za l, m, n do (2) nalezené úměrné hodnoty, obdržíme:

$$R=(x-x')(bc_1)+(y-y')(ca_1)+(z-z')(ab_1)=0. \qquad (4)$$

Rovina R_1 jde přímkou P_1, tudíž i bodem M'', a rovnice její jest

$$R_1=(x-x'')(bc_1)+(y-y')(ca_1)+(z-z')(ab_1)=0. \qquad (5)$$

Jest totiž $R\,||\,R_1$ a vzdálenost těchto rovin bude

$$d=p_1-p$$

čili

$$d=\frac{(x''-x')(bc_1)+(y''-y')(ca_1)+(z''-z')(ab_1)}{\sqrt{(bc_1)^2+(ca_1)^2+(ab_1)^2}}\,. \qquad (6)$$

Známý tento výraz můžeme poněkud přeměniti. Označíme-li spojnici bodů M', M'' znakem P_2 a směrnice její α_2, β_2, γ_2, délku $\overline{M'M''}=r$, obdržíme promítnutím této délky do os souřadnic:

$$\begin{aligned} x''-x'&=ra_2\\ y''-y'&=rb_2\\ z''-z'&=rc_2\,.\end{aligned} \qquad (7)$$

*) Dr. Fr. Studnička: Úvod do anal. geom. v prostoru 1874. pag. 40. Spis tento cituji později krátce: Std. geom.

[1]) Std. geom. pg. 42.

Uvedeme-li hodnoty tyto do vzorce (6), připomenuvše si, že jest

$$(bc_1)^2 + (ca_1)^2 + (ab_1)^2 = sin^2 (PP_1),$$

obdržíme

$$d = \frac{r\,(ab_1\,c_2)}{sin\,(PP_1)}, \tag{8}$$

Se zřetelem k rovnici (3) obdržíme pak

$$(ab_1\,c_2)^2 = \begin{vmatrix} 1 & cos\,(PP_1) & cos\,(PP_2) \\ cos\,(PP_1) & 1 & cos\,(P_1P_2) \\ cos\,(PP_2) & cos\,(P_1P_2) & 1 \end{vmatrix}, \tag{9}$$

takže konečně bude

$$d = \frac{r}{sin\,(PP_1)} \cdot \begin{vmatrix} 1\ , & cos\,(PP_1)\ , & cos\,(PP_2) \\ cos\,(PP_1)\ , & 1\ , & cos\,(P_1P_2) \\ cos\,(PP_2)\ , & cos\,(P_1P_2)\ , & 1 \end{vmatrix}^{1/2}. \tag{10}$$

Pošineme-li přímku P_1 rovnoběžně tak, aby bodem M' probíhala, a označíme-li ji v nové poloze znakem P_1', obdržíme třístěn $PP_1'P_2$ a determinant (9) dává nám čtverec sinusu rožného *) $M'PP_1'P_2 = (M')$; máme tudíž

$$d = \frac{r\,sin\,(M)'}{sin\,(PP_1)}. \tag{11}$$

Označíme-li úhel přímky P_2 s rovinou PP_1 písmenem C, je též

$$sin^2\,(M') = \begin{vmatrix} 1\ , & cos\,(P\,P_1)\ , & cos\,(P\,P_2) \\ cos\,(PP_1)\ , & 1\ , & cos\,(P_1P_2) \\ cos\,(PP_2)\ , & cos\,(P_1P_2)\ , & 1 \end{vmatrix} = sin^2 C sin^2\,(PP_1)$$

a podlé toho

$$d = r\,sin\,C. \tag{12}$$

Vzorce (11) i (12) přejdou ve

$$d = r,$$

je-li $P_2 \perp$ na rovinu PP_1 t. j. je-li $P_2 \perp P$ i $P_2 \perp P_1$, takže udává $\overline{M'M''}$ nejkratší vzdálenost prímek P, P_1.

II.

„Roviny, jež půlí vnitřní úhly čtyrstěnu, protínají se v bodě jediném“.

---

*) Std. geom. pg. 17. *Studnička* Základové sferické trigonometrie pg. 10.

Důkazů úlohy této je více[1]) známo; myslím, že ve formě, v jaké důkaz podávám, bude více názorný.

Předpokládejme opět normalný tvar rovnice roviny. Rovnice stěn čtyrstěnu budou

$$R_k \equiv a_k x + b_k y + c_k z - p_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

jež musí vyhověti podmínce

$$(a_1\ b_2\ c_3\ d_4) \gtrless 0,$$

jelikož bychom v opačném případě měli čtyry roviny protínající se v bodě jediném.[2])

Rovnice rovin rozpolujících vnitřní úhly čtyrstěnu budou

$$\begin{aligned} &R_1 - R_2 = 0, \ R_1 - R_3 = 0, \ R_1 - R_4 = 0 \\ &R_2 - R_3 = 0, \ R_2 - R_4 = 0, \\ &R_3 - R_4 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Upotřebíme-li označení

$$V_{hk} \equiv R_h - R_k = 0,$$

máme

$$V_{12} + V_{23} + V_{34} \equiv V_{14}, \tag{4}$$

kterouž to rovnici můžeme takto čísti:

Rovina V_{12} protíná rovinu V_{23} ve přímce P, kteráž protíná rovinu V_{34} v bodě B, jenž leží na rovině V_{14}; neb identičnost v rovnici (4) nám praví, že souřadnice průseku rovin V_{12}, V_{23}, V_{34}, vyhovujíce rovnicím těchto rovin, vyhovují i rovnici rovniny V_{14}.

Rovina V_{13} prochází přímkou P co průseku rovin V_{12} i V_{23}, neb máme

$$V_{13} \equiv V_{12} + V_{23} = 0;$$

tedy prochází i bodem B, bodem to přímky P.

Avšak můžeme rovnici (4) i čísti takto:

Rovina V_{23} protíná rovinu V_{34} ve přímce P', kteráž protíná rovinu V_{12} opět v bodě B roviny V_{14} (neb podotknuto již, že roviny V_{12}, V_{23}, V_{34}, V_{41}, mají pouze jediný bod společný).

Jelikož V_{24} prochází přímkou P' za příčinou

$$V_{24} \equiv V_{23} + V_{34} = 0,$$

probíhá též bodem B.

Společný bod rovin V_{12}, V_{23}, V_{34}, V_{41} přísluší tudíž i rovinám V_{13}, V_{24}, čímž věta dokázána.

Vezmeme-li rovinu papíru za rovinu V_{14}, můžeme i graficky úlohu tu znázorniti.

[1]) Std. geom. pg. 36. [2]) ibid. pg. 36.

Poznámka: Rovnice

$$V_{14} + \lambda V_{24} + \mu V_{34} = 0 \qquad (5)$$

značí při libovolném λ, i μ souhrn všech rovin probíhajících průsekem rovin V_{14}, V_{24}, V_{34}. Jelikož za určité hodnoty λ i μ rovnice rovin V_{12}, V_{13}, V_{23} obdržíme, patří tyto roviny zpomenuté síti rovin (5), t. j. probíhají průsekem rovin V_{14}, V_{24}, V_{34}.

Úloha. Označíme-li písmenem t poloměr koule ve čtyrstěn vepsané a $x'y'z'$ souřadnice jejího středu (společný průsek rovin V_{hk}), máme

$$a_k x' + b_k y' + c_k z' - p_k = -\lambda_k t,$$

z čehož jde

$$a_k x' + b_k y' + c_k z' + \lambda_k t = p_k,$$

kde je $k = 1, 2, 3, 4$, a $\lambda_k = \pm 1$. Jednoduchá úvaha ihned podá, že jsou λ buď *všechna* positivní, aneb tři positivní a jedno negativní, čímž obdržíme pět řešení, což i geometricky jasno. Jmenovatel společný je

$$(a_1 b_2 c_3 \lambda_4) = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k L_k.$$

Označíme-li rohu A_k protilehlou stěnu R_k, bude kosinus hrany $A_1 A_2$

$$\cos(A_1 A_2) = \cos(R_3 R_4),$$

kde symetrie označení je jasná; podlé toho můžeme psáti na př.

$$L_4{}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(A_3A_4), & \cos(A_2A_4) \\ \cos(A_3A_4), & 1 & \cos(A_1A_4) \\ \cos(A_2A_4), & \cos(A_1A_4), & 1 \end{vmatrix}.$$

V jaké souvislosti je L_4 se sinusem rožným $Op_1 p_2 p_3$?

Vidíme že i zde koefficientu směru λ_k výhodně upotřebiti můžeme, jakož již ve Zprávě I. jedn. č. math. jsem ukázal.

Úlohy.

I. Z mathematiky.

Řešení úlohy 1.

Zaslal *Jos. Zvěřina*, žák VII. tř. r. g. v Chrudimi.

Abychom porovnali hodnotu doživotního důchodu 800 zl. s cenou domu, vypočítejme podlé vzorce