Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

Příspěvěk ke trigonometrii

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 7 (1878), No. 4, 245--248

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122880

a veďme příslušné paprsky. Učiníme-li pak

$$Az_1 = \sqrt[n]{a} \text{ zde } \sqrt[4]{a}), \; Az_2 = (\sqrt[n]{a})^2, \; Az_3 = (\sqrt[n]{a})^3 \ldots$$

pak

$$Az_5 = (\sqrt[n]{a})^{n+1} \ldots, \text{ jakož i pod osou } AX \text{ i } Az_1' = (\sqrt[n]{a})^{-1},$$

$$Az'_2 = (\sqrt[n]{a})^{-2}, \ldots$$

obdržíme body z_1, z_2, z_3, ..., z_5, ..., z_1', z_2', z_3', ..., jichž řádným spojením i s dříve určenými body 0 a z_4 povstane spirála logarithmická AS_L. Výraz $\sqrt[n]{a}$, jakož i jeho mocniny určí se jednoduchým způsobem grafickým, zvláště když n jest mocnina čísla 2. —

Upotřebení těchto spiral ku grafickému určování logarithmů je velmi jednoduché. Danou délkou $AM > 1$ protne se křivka AS_L v bodu M a vede se paprsek AM, který protíná Arch. spirálu v m, délka Am jest pak logarithmem délky AM. Podotýkáme, že průsek m nemůže ležeti na S_A', poněvadž je log. délky $AM > 1$ vždy positivní. Je-li daná délka $AM' < 1$, bude její logarithmus negativní a průsečný bod m' leží na S_A', načež je opět $log\ AM' = Am'$.

Spirála S_L otáčí se v bezkonečném počtu závitů kolem polu A a přibližuje se k němu neustále, aniž by jej kdy dosáhla, nemůže se tedy $log.$ 0 stanoviti, což je však zcela přirozeno, neboť $log.\ 0 = -\infty$.

Má-li se naopak z daného logarithmu ustanoviti příslušná délka, protne se daným logarithmem, je-li positivní nebo negativní, buď část spirály AS_A nebo AS_A', vede se průsekem paprsek až k S_L, jehož délka podává rozřešení úlohy.

Příspěvek ke trigonometrii.

Napsal

Dr. **K. Zahradník** v Záhřebě.

Budiž dán trojúhelník ABC; strany jeho $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, a úhly toho trojúhelníka označme řeckým písmenem vrchole. Promítneme-li vždy dvě strany do strany třetí, tu obdržíme

$$\begin{aligned} b\cos\gamma + c\cos\beta &= a \\ c\cos\alpha + a\cos\gamma &= b \\ a\cos\beta + b\cos\alpha &= c. \end{aligned} \tag{1}$$

Tyto rovnice podávají nám vztahy, jimž strany i úhly trojúhelníku vyhověti musí; tím zahrnují v sobě řešení trojúhelníka z daných tří částí. Z rovnic (1) odvoditi můžeme

1. vyloučením stran relaci mezi úhly trojúhelníku, totiž

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & -1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & -1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Rozložíme-li tento determinant, obdržíme:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1 = 0 \tag{3}$$

aneb
$$\cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\alpha\cos^2\beta$$
$$= 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta;$$

i jest tedy, odmocníme-li na obou stranách a zjednodušíme-li pak stranu pravou

$$\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta,$$

aneb $\cos(\pi-\gamma) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$,
což znamená

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma. \tag{4}$$

Rovnice (2) zastupuje tudíž všeobecnou vlastnost trojúhelníku, že součet vnitřních jeho úhlů obnáší 180°.

2. Vylučme nyní jednu stranu a protější úhel na př. c, γ z rovnic (1). Za tou příčinou uspořádejme rovnice (1) podlé c a $\cos\gamma$, považujíce je za neznámé; tím obdržíme

$$\begin{aligned} \cos\alpha \,.\, c + a \,.\, \cos\gamma \quad - b &= 0 \\ \cos\beta \,.\, c + b \,.\, \cos\gamma \quad - a &= 0 \\ -c + 0 \,.\, \cos\gamma + (a\cos\beta + b\cos\alpha) &= 0, \end{aligned}$$

z kterýchžto rovnic plyne co výsledek eliminace [1]) neznámých c, $\cos\gamma$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & a & -b \\ \cos\beta & b & -a \\ -1 & 0 & a\cos\beta + b\cos\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

[1]) Viz *Studnička*. Algebra pag. 128.

Rozložíme-li tento determinant podlé prvků druhého sloupce, obdržíme

$$-a\begin{vmatrix} \cos\beta & -a \\ -1 & a\cos\alpha + b\cos\alpha \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} \cos\alpha & -b \\ -1 & a\cos\beta + b\cos\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

z čehož plyne

$$a^2(1-\cos^2\beta) - b^2(1-\cos^2\alpha) = 0,$$

čili

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \qquad (5)$$

známá to věta sinusová [2]) t. j. rovnicí vyjádřená druhá všeobecná vlastnost trojúhelníka, že naproti větší straně leží větší úhel.

3. Vyloučíme-li z rovnic (1) dva úhly na př. α, β, obdržíme vztah mezi jedním úhlem a stranami trojúhelníku. Budeť tu

$$\begin{vmatrix} b & a & -c \\ 0 & c & b\cos\gamma - a \\ c & 0 & a\cos\gamma - b \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant tento rozložiti můžeme na dva determinanty, totiž

$$-\begin{vmatrix} b & a & c \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}\cos\gamma = 0, \qquad (6)$$

z kteréžto rovnice plyne:

$$\cos\gamma = \begin{vmatrix} b & a & c \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Podobně bychom i $\cos\alpha$, $\cos\beta$ mohli vyjádřiti. Jest pak

$$\begin{vmatrix} b & a & c \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = c(b^2 + a^2 - c^2), \quad \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = 2abc,$$

takže můžeme rovnici (6) psáti, zkrátíme-li veličinou c na obou stranách,

---

[2]) Eliminací veličin a, $\cos\alpha$, obdrželi bychom obdobně

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

tudíž můžeme rovnici (5) psáti

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

$$-(b^2+a^2-c^2)+2ab\cos\gamma=0.$$

Řešíme-li tuto rovnici podlé c^2, obdržíme [3])

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma, \tag{8}$$

známou to větu Carnotovu, *rovnicí* to vyjádřenou třetí obecnou vlastnost trojúhelníku, že je jedna strana menší než součet obou ostatních stran.

Tím jsme poznali, že soustavou (1) vyjádřeny jsou tři obecné vlastnosti trojúhelníku (3), (5), (8), jimž strany i úhly trojúhelníku vyhověti musí; známe-li tedy tři částky (za příčinou rovnice (3) musí aspoň jedna z těch tří částek býti stranou), můžeme trojúhelník řešiti t. j. pomocí soustavy (1) neb odvozené [(3), (5), (8)] můžeme i ostatní částky trojúhelníku vypočítati nebo geometricky řečeno, z tří určovacích částí trojúhelníku můžeme trojúhelník sestrojiti.

Z analytické geometrie roviny.

Napsal

prof. Dr. **K. Zahradník** v Záhřebě.

V následujících řádkách uvádíme řešení dvou známých úloh geometrie prostorné s několika poznámkami, jež snad počátečníkovi budou vhodným cvičením. Podotknouti sluší, že jsme upotřebili označení

$$a_k=\cos\alpha_k$$

t. j. píšeme latinské písmeno za kosinus úhlu řeckým písmenem označeného.

I.

„Dané jsou dvě mimoběžky P, P_1; máme určiti rovinu, kteráž jdouc přímkou jednou, je rovnoběžná s přímkou druhou.“

Označíme rovinu, položenou přímkou P [P_1] rovnoběžně s přímkou P_1 [P], písmenem R, [R_1]. Roviny R, R_1 jsou rovno-

---

[3]) Podobně bychom obdrželi, vyloučivše jednou $\cos\beta$, $\cos\gamma$, po druhé $\cos\gamma$, $\cos\alpha$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta.$$