Alois Strnad

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 5, 256--260

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122877`

$$(\cot\alpha + \cot\beta)^{-1} + (\cot\gamma + \cot\delta)^{-1} = \frac{m}{a} + \frac{n}{a} = 1,$$

čímž i vzorec (2) dokázán.

Drobné zprávy.

Napsal

Alois Strnad,

professor v Hradci Králové.

Označení čísla Ludolfova. V listu k Eulerovi daném 24. prosince 1742 zmiňuje se Goldbach, že písmene π „obyčejně" užívá se k označení poměru mezi obvodem kruhu a průměrem. Nezdá se však, že by tomu tak naskrze bylo. Vždyť ještě Mik. Bernoulli 1738, Euler 1740 užívali k tomu účelu písmene p a Jan Bernoulli 1742 písmene c. Teprve v pojednání Variae observationes circa series infinitas, uveřejněném r. 1744 (Commentarii academiae Petropolitanae, tome IX., p. 165) praví *Euler*: „posito π pro peripheria circuli cujus diameter est 1"; přidržel pak se znaku toho též v Introductio in analysin infinitorum 1748, kdež i poprve znamenám písmenem e základ přirozených logarithmů. Od vydání klassického tohoto díla datuje se obecné užívání obou symbolů.

(*Bibliotheca mathematica.* 1889, p. 28).

Přímka hypocykloidou. Uvnitř kruhu poloměru $2r$ valí se kruh poloměru r; každý bod tohoto kruhu hybného opisuje dráhu přímou, která jest průměrem kruhu stálého. Tato věta připisuje se obyčejně La Hire-ovi (1694), ač již Cardanovi (1572) známa byla. M. Curtze však upozornil, že původcem jejím jest *Koprník*, v jehož nesmrtelném díle obsažena jest v kapitole 4. knihy III. (*Bibliotheca mathematica.* *) 1888, p. 65).

Homografie. V Comptes rendus z r. 1853 řešil *Chasles* tuto úlohu: „Dáno jest v rovině 5 bodů a, b, c, d, e v obecné

*) Časopis tento, věnovaný dějinám mathematiky, vychází ve Stockholmu redakcí G. Eneströma.

poloze a 5 bodů a', b', c', d', e' náležejících přímce P. Stanoviti bod o tak, aby svazek paprsků o (a, b, c, d, e) byl projektivný s řadou bodů a', b', c', d', e'". Řešení této úlohy, častokrát reprodukované (viz ku př. *Cremona-Weyr*, Úvod do geom. theorie křivek rovinných, str. 67), jest v principu jednoduché, ale grafické provedení jeho jesti dosti složité. Nejnověji udal *Schroeter* následující elegantní lineárné řešení:

Dány jsou body: a, b, c, d, e a na P body a', b', c', d', e'. Sestrojme průsečíky:

$$\begin{array}{lll}
(bb', cc') = a'' & (cc', aa') = b'' & (aa', bb') = c'' \\
(a''a', bc) = a_1 & (b''b', ca) = b_2 & (c''c', ab) = c_3 \\
(a''d', bc) = d_1 & (b''d', ca) = d_2 & (c''d', ab) = d_3 \\
(a''e', bc) = e_1 & (b''e', ca) = e_2 & (c''e', ab) = e_3 \\
(aa_1, dd_1) = \mathrm{A} & (aa_1, ee_1) = \mathrm{A}_1 & (\mathrm{BC}, \mathrm{B}_1\mathrm{C}_1) = \mathrm{A}_2 \\
(bb_2, dd_2) = \mathrm{B} & (bb_2, ee_2) = \mathrm{B}_1 & (\mathrm{BA}, \mathrm{C}_1\mathrm{A}_1) = \mathrm{B}_2 \\
(cc_3, dd_3) = \mathrm{C} & (cc_3, ee_3) = \mathrm{C}_1 & (\mathrm{AB}, \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1) = \mathrm{C}_2.
\end{array}$$

Přímky $a\mathrm{A}_2$, $b\mathrm{B}_2$, $c\mathrm{C}_2$ protínají se v jediném bodě a ten jest hledaným bodem o.

(*Schlömilch*, Zeitschrift für Mathematik u. Physik, 35. Jahrg. 1890, p. 59.).

Orthocentrický čtyrstěn. Měli jsme již příležitost poukázati na tomto místě k některým novějším pracím, jichž účelem jest, aby příhodné vlastnosti trojúhelníka rozšířeny byly též na čtyrstěn (Časopis: ročník XV, str. 277.; ročn. XVII, str. 75.). Dnes zmíníme se krátce o pojednání *Sur le tétraèdre orthocentrique,* které ve směru tom napsal *Gohière de Longchamps*, prof. v Paříži a dopisující člen král. české společnosti nauk.

Známo jest, že výšky čtyrstěnu neprotínají se obecně v jednom bodě, nýbrž jsou vespolek mimoběžny a tvoří čtveřinu přímek jedné soustavy na hyperboloidu. Protínají-li se dvě výšky čtyrstěnu, protínají se též druhé dvě; procházejí-li tři výšky jedním bodem, prochází jím též výška čtvrtá. (*Steiner*).

Zvláštní druh čtyrstěnu, jehož výšky mají společný průsečník (orthocentrum), lze nazvati čtyrstěnem orthocentrickým. Hlavní vlastnosti jeho jsou: Nutná a dostatečná podmínka orth. čtyrstěnu jest, aby pata výšky spuštěné s jednoho vrcholu na protější stěnu byla průsečíkem vyšek této stěny. Splněna-li tato podmínka při jedné výšce, jest platnou též při výškách ostatních. — Protější hrany orth. čtyrstěnu stojí na sobě kolmo. Má-li čtyrstěn dvě dvojiny protějších hran vzájemně kolmých, jest takovou i dvojina třetí a čtyrstěn jest orthocentrický. Čtverce dvou a protějších hran mají stejný součet. — Středy hran a paty výšek leží na ploše kulové, jejímž středem jest těžiště čtyrstěnu. Těžiště jednotlivých stěn, průsečíky výšek těchto stěn a body dělící v poměru 1 : 2 vzdálenosti vrcholů orth. čtyrstěnu od jeho průsečíku výšek leží též na určité ploše kulové. — Lze stanoviti plochu kulovou, vzhledem ku které jest každý vrchol orth. čtyrstěnu polem protější stěny.

Tato vlastnost dovozena ve jmenované stati užitím souřadnic barycentrických, jimiž vyvozeny též četné vztahy metrické týkající se uvažovaného čtyrstěnu.

(*Mathesis,* tome X. p. 49 et 77).

Z theorie ploch. Jsou-li ϱ_1, ϱ_2 hlavní poloměry křivosti v některém bodě plochy a prochází-li bodem tím křivka geodetická, která tvořic úhel φ s křivkou křivosti o poloměru ϱ_1, má poloměr křivosti ϱ a poloměr kroucenosti τ, jest dle *Eulera*

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2}$$

a dle *Bertranda*

$$\frac{1}{\tau}=\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)\cos\varphi\sin\varphi\,.$$

Ku směru φ náleží směr sdružený φ' stanovený rovnicí

$$tg\varphi\,.\,tg\varphi'=-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

a tvořící s φ úhel ω.

Italský geometr *V. Reina* vyšetřoval nejnověji křivky, které na ploše ve sdružených směrech procházejí; z pojednání jeho Sulle linee coniugate di una superficie uvádíme tyto pozoruhodné relace:

$$\frac{1}{\varrho}:\frac{1}{\tau}=tg\,\omega,$$

$$\frac{1}{\varrho\varrho'}=\frac{sin^2\omega}{\varrho_1\varrho_2},$$

$$\frac{\varrho'}{\varrho}=-\frac{\tau'}{\tau}=\frac{\varrho_2}{\varrho_1}cos^2\varphi+\frac{\varrho_1}{\varrho_2}sin^2\varphi.$$

Značí pak tu ϱ' poloměr křivky a τ' poloměr kroucenosti křivky geodetické směru φ' sdruženého s φ.

Jestli $\varphi=\varphi'$, sjednocují se směry sdružené ve směr *křivky asymptotické*, pro kterou jest

$$tg^2\varphi=-\frac{\varrho_2}{\varrho_1},\ \varrho=\infty,\ \tau^2=-\varrho_1\varrho_2.$$

Je-li $\varphi+\varphi'=0$ aneb π,

jest $tg^2\varphi=\frac{\varrho_2}{\varrho_1},\ \varrho=\varrho',\ \tau=-\tau';$

křivky sdružené, těmto podmínkám vyhovující, slovou *charakteristickými křivkami* plochy.

(*Atti della reale Accademia dei Lincei. Rendiconti*, vol. VI. 1890, p. 156).

Polynomy Legendreovy. Vyvineme-li řadu

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_1^\infty X_n\alpha^n,$$

slovou výrazy X mnohočleny Legendreovými.

O nich platnými jsou vztahy:

$$(n+1)X_{n+1}-(2n+1)x\,X_n+nX_{n-1}=0,$$

$$\int_{-1}^{+1}X_mX_n\,dx=0,\qquad \int_{-1}^{+1}X_n^2\,dx=\frac{2}{2n+1}.$$

Poslední dva vzorce lze, jak *Hermite* (Sur les polynômes de Legendre) ukázal, snadně obdržeti, vyvineme-li integrál

$$J=\int_{-1}^{+1}\frac{x^p dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$$

v řadu dle mocnin α; obecný člen její jest pak

$$\alpha^n \int_{-1}^{+1} x^p X_n \, dx,$$

který přechází v nullu při $n > p$.

Současně objasnil týž slavný učenec pozoruhodnou zvláštnost integrálu Laplaceova

$$X_n = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \, . \cos \varphi)^{n+1}},$$

ve kterém klásti jest $\varepsilon = +1$ neb -1 dle toho, je-li realná část proměnné x kladnou neb zápornou. Přetržitost tato nejeví se na výrazu Jacobiově:

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1} \, . \cos \varphi)^n \, d\varphi.$$

(*Rendiconti del circolo matematico di Palermo.* Tomo IV. 1890, p. 146).

Úlohy.

Řešení úlohy 16.

(Zaslal p. *Ervín Šámal*, stud. VIII. tř. g. v Jičíně.)

Rovnici danou lze psáti

$$4^{2 \sin^2 x + 1} + 4^{1 - 2 \sin^2 x} = 10,$$

a položíme-li $4^{2 \sin^2 x} = z$, máme rovnici

$$2z + \frac{2}{z} = 5 \quad \text{aneb} \quad 2z^2 - 5z + 2 = 0.$$

Řešením obdržíme

$$z = \frac{5 \pm 3}{4} = 2, \frac{1}{2}$$

a rovnice

$$4^{2 \sin^2 x} = 2 \quad \text{čili} \quad 2^{4 \sin^2 x} = 2$$

vede k realnému kořenu

$$\sin x = \pm \frac{1}{2}, \quad \text{t. j.} \quad x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$