Augustin Pánek

# Drobnost z trigonometrie

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 19 (1890), No. 5, 254--256

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122876

# Drobnost z trigonometrie.

Pro žáky středních škol napsal

**Augustin Pánek.**

V „*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik,*“ svaz. 17. (Berlin, 1888), položen na str. 561. referát o zajímavé úloze z trigonometrie, totiž:

„Je-li ABCD čtverec o straně $a$, uvnitř bod P, který neleží na úhlopříčné tohoto čtverce, a nazveme-li

$$\sphericalangle \mathrm{APB} = \alpha, \quad \sphericalangle \mathrm{BPC} = \beta, \quad \sphericalangle \mathrm{CPD} = \gamma, \quad \sphericalangle \mathrm{DPA} = \delta,$$

jest

$$(1) \qquad (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma)^{-1} + (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\delta)^{-1} = (\cot\alpha + \cot\gamma)^{-1} + (\cot\beta + \cot\delta)^{-1} = 1.$$

Nazveme-li dále

$$\sphericalangle \mathrm{PAD} = \alpha, \quad \mathrm{PDA} = \beta, \quad \sphericalangle \mathrm{PBC} = \gamma, \quad \sphericalangle \mathrm{PCB} = \delta,$$

bude

$$(2) \qquad (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma)^{-1} + (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\delta)^{-1} = (\cot\alpha + \cot\beta)^{-1} + (\cot\gamma + \cot\delta)^{-1} = 1.\text{“}$$

Tyto vzorce můžeme obdržeti takto:

Vedeme-li bodem P

$$\mathrm{MN} \# \mathrm{AB}, \quad \mathrm{RS} \# \mathrm{BC},$$

bude dle známého vzorce

$$(\mu) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RP}} + \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RP}}}{1 - \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RP}} \cdot \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RP}}} = \frac{a \cdot \mathrm{RP}}{\overline{\mathrm{RP}}^2 - \mathrm{AR} \cdot \mathrm{RB}},$$

a podobně

$$(\nu) \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{a \cdot \mathrm{PS}}{\overline{\mathrm{PS}}^2 - \mathrm{AR} \cdot \mathrm{RB}}.$$

Položme $\mathrm{PM} = m$, $\mathrm{PN} = n$, $\mathrm{PR} = r$, $\mathrm{PS} = s$, bude dle tohoto označení součet

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma = \frac{ar}{r^2 - mn} + \frac{as}{s^2 - mn};$$

ježto $r + s = a$, nabudeme

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma = \frac{a^2 (rs - mn)}{(r^2 - mn)(s^2 - mn)},$$

a příslušnou záměnou písmen obdržíme $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\delta$.

Pročež součet převratných hodnot těch

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma)^{-1} + (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\delta)^{-1}$$
$$= \frac{(r^2 - mn)(s^2 - mn)}{a^2(rs - mn)} + \frac{(m^2 - rs)(n^2 - rs)}{a^2(mn - rs)}$$
$$= \frac{mn(r^2 + s^2) - rs(m^2 + n^2)}{a^2(mn - rs)} = \frac{mn(r+s)^2 - rs(m+n)^2}{a^2(mn - rs)}.$$

Avšak $m + n = r + s = a$, tudíž

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma)^{-1} + (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\delta)^{-1} = 1.$$

Vzhledem k ($\mu$), ($\nu$) jest především

$$\cot\alpha + \cot\gamma = \frac{r^2 - mn}{ar} + \frac{s^2 - mn}{as} = \frac{rs - mn}{rs},$$

a záměnou písmen dostaneme hodnotu pro $\cot\beta + \cot\delta$, takže součet převratných hodnot těch

$$(\cot\alpha + \cot\gamma)^{-1} + (\cot\beta + \cot\delta)^{-1} = \frac{rs}{rs - mn} + \frac{mn}{mn - rs} = 1,$$

čímž vzorec (1) dokázán.

Abychom vzorec (2) dokázali, pomněme, že

$$a = \mathrm{PM} + \mathrm{PN} = \mathrm{MA}\,.\operatorname{tg}\alpha + \mathrm{NB}\,.\operatorname{tg}\gamma = r(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma),$$

tudíž $$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{r}$$

a analogicky $$\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\delta = \frac{a}{s},$$

pročež

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma)^{-1} + (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\delta)^{-1} = \frac{r}{a} + \frac{s}{a} = 1.$$

Ježto dále

$$a = \mathrm{RP} + \mathrm{PS} = \mathrm{AM} + \mathrm{MD} = m(\cot\alpha + \cot\beta),$$

tedy

$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{a}{m}$$

a $$\cot\gamma + \cot\delta = \frac{a}{n},$$

načež

$$(\cot\alpha + \cot\beta)^{-1} + (\cot\gamma + \cot\delta)^{-1} = \frac{m}{a} + \frac{n}{a} = 1,$$

čímž i vzorec (2) dokázán.

---

# Drobné zprávy.

Napsal

**Alois Strnad,**

professor v Hradci Králové.

**Označení čísla Ludolfova.** V listu k Eulerovi daném 24. prosince 1742 zmiňuje se Goldbach, že písmene $\pi$ „obyčejně" užívá se k označení poměru mezi obvodem kruhu a průměrem. Nezdá se však, že by tomu tak naskrze bylo. Vždyť ještě Mik. Bernoulli 1738, Euler 1740 užívali k tomu účelu písmene $p$ a Jan Bernoulli 1742 písmene $c$. Teprve v pojednání Variae observationes circa series infinitas, uveřejněném r. 1744 (Commentarii academiae Petropolitanae, tome IX., p. 165) praví *Euler*: „posito $\pi$ pro peripheria circuli cujus diameter est 1"; přidržel pak se znaku toho též v Introductio in analysin infinitorum 1748, kdež i poprve znamenám písmenem $e$ základ přirozených logarithmů. Od vydání klassického tohoto díla datuje se obecné užívání obou symbolů.

(*Bibliotheca mathematica.* 1889, p. 28).

**Přímka hypocykloidou.** Uvnitř kruhu poloměru $2r$ valí se kruh poloměru $r$; každý bod tohoto kruhu hybného opisuje dráhu přímou, která jest průměrem kruhu stálého. Tato věta připisuje se obyčejně La Hire-ovi (1694), ač již Cardanovi (1572) známa byla. M. Curtze však upozornil, že původcem jejím jest *Koprník*, v jehož nesmrtelném díle obsažena jest v kapitole 4. knihy III. (*Bibliotheca mathematica.* *) 1888, p. 65).

**Homografie.** V Comptes rendus z r. 1853 řešil *Chasles* tuto úlohu: „Dáno jest v rovině 5 bodů $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ v obecné

*) Časopis tento, věnovaný dějinám mathematiky, vychází ve Stockholmu redakcí G. Eneströma.