Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

# Úlohy

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 19 (1890), No. 5, 260--268

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122872

$$\alpha^n \int_{-1}^{+1} x^p X_n \, dx,$$

který přechází v nullu při $n > p$.

Současně objasnil týž slavný učenec pozoruhodnou zvláštnost integrálu Laplaceova

$$X_n = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \, . \, \cos \varphi)^{n+1}},$$

ve kterém klásti jest $\varepsilon = +1$ neb $-1$ dle toho, je-li realná část proměnné $x$ kladnou neb zápornou. Přetržitost tato nejeví se na výrazu Jacobiově:

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \, . \, \cos \varphi)^n \, d\varphi.$$

*(Rendiconti del circolo matematico di Palermo.* Tomo IV. 1890, p. 146).

---

# Úlohy.

## Řešení úlohy 16.

(Zaslal p. *Ervín Šámal*, stud. VIII. tř. g. v Jičíně.)

Rovnici danou lze psáti

$$4^{2 \sin^2 x + 1} + 4^{1 - 2 \sin^2 x} = 10,$$

a položíme-li $4^{2 \sin^2 x} = z$, máme rovnici

$$2z + \frac{2}{z} = 5 \quad \text{aneb} \quad 2z^2 - 5z + 2 = 0.$$

Řešením obdržíme

$$z = \frac{5 \pm 3}{4} = 2, \frac{1}{2}$$

a rovnice

$$4^{2 \sin^2 x} = 2 \quad \text{čili} \quad 2^{4 \sin^2 x} = 2$$

vede k realnému kořenu

$$\sin x = \pm \frac{1}{2}, \quad \text{t. j.} \quad x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Jos. Bartoš* z VIII. tř. a *Ant. Kraus* ze VII. tř. g. v Č. Budějovicích, *J. Bohata* a *P. Vejnar* z VIII. tř. akad. g. v Praze, *Lad. Červenka*, *Lad. Otta*, *Ant. V. Doubal* a *K. Vaňouček* ze VI. tř. r. v Pardubicích, *Fr. Košík* z VIII. tř. a *A. Mimra* ze VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, *Břetislav Tolman*, *Václav Chmelař*, ze VII. tř. a *Jindřich Kurz* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Václav Felix* a *Jaroslav Chládek* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Frant. Lukeš*, *Vincenc Vodička* ze VII. tř., *Gothard Nehasil* a *A. Schwippel* ze VI. tř. česk. real. v Praze, *Jos. Zelenka*. z VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, *Frant. Šoreys*, *Fr. Hradilík* a *J. V. Kubíček* z VIII. tř. a *B. A. Pavlousek* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Fr. J. Rybka*, ze VI. tř. r. v Brně, *Arnošt Rosa* ze VII. tř. g. v Novém Bydžově, *Josef Štumpf* ze VII. tř. g. v Roudnici, *Václav Pavlík* z VIII. tř. a M. V. *Popper* ze VII. g. v Písku, *Jar. Friedrich, Jind. Charypar* z VIII. tř. a *J. Záhorský* ze VII. tř. g. vyšš. r. g. na Malé Straně v Praze, *Arnošt Lilienfeld* z VIII. tř. g. v Jičíně a slečna *Anna Kotálova* ve Vys. Mýtě.

## Řešení úlohy 17.

(Zaslal p. *Frant. Lukeš*, stud. VII. tř. české real. v Praze.)

Úloha daná vyžaduje, abychom řešili soustavu rovnic

$$x+y+z=23$$

$$(1)\qquad \binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{z}{2}=86$$

$$\binom{x}{3}+\binom{y}{3}+\binom{z}{3}=210$$

z nichž dvěma posledním lze dáti podobu

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2-(x+y+z)=172$$

$$(3)\qquad x^3+y^3+z^3-3(x^2+y^2+z^2)+2(x+y+z)=1260.$$

Užitím rovnice (1) promění se (2) a (3) ve

$$(4)\qquad x^2+y^2+z^2=195$$

$$(5)\qquad x^3+y^3+z^3=1799,$$

tak že nyní soustavu (1), (4), (5) řešiti jest.

Zmocníme-li rovnici (1) dvěma a odečteme-li pak rovnici (4), najdeme

$$(6) \qquad xy + yz + zx = 167.$$

Zmocníme-li však rovnici (1) třemi a odečteme-li rovnici (5), nalezneme

$$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz = 3456$$

čili, se zřetelem k rovnici (1),

$$xy(23-z) + yz(23-x) + zx(23-y) + 2xyz = 3456;$$

odtud vypočítáme

$$(7) \qquad xyz = 385.$$

Rovnice (1), (6), (7) poučují nás, že neznámé $x$, $y$, $z$ jsou kořeny rovnice 3. stupně

$$u^3 - 23u^2 + 167u - 385 = 0.$$

Jelikož jest $385 = 5.\ 7.\ 11$ a jednotka není kořenem této rovnice, musí býti

$$x = 5, \quad y = 7, \quad z = 11.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Břetislav Tolman* a *Václav Chmelař* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Gothard Nehasil* ze VI. tř. české reál. v Praze, *Frant. Hradilík* a *F. Šoreys* z VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Jar. Chládek* a *Václav Felix* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Arnošt Rosa* ze VII. tř. g. v Novém Bydžově, *Ervín Šámal* z VIII. tř. g. v Jičíně, *Václav Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku a *Fr. Kosík* z VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě.

## Řešení úlohy 18.

(Zaslal p. *P. Vejnar*, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze.)

Tečny vedené bodem daným ke kružnici dané svírají úhel $2\alpha$, kdež

$$\sin\alpha = \frac{r}{v}, \quad \alpha = 28^0\,54'\,13'' = 104053''.$$

Sečny bodem týmž procházející budou obsahovati tětivy $t$ větší než 24 *cm*, jsou-li zároveň sečnami kružnice soustředné poloměru $\varrho = \sqrt{r^2 - \frac{t^2}{4}}$. Tečny jdoucí daným bodem k této druhé kružnici tvoří úhel $2\beta$, při čemž

$$\sin\beta = \frac{\varrho}{v}, \qquad \beta = 26^0\, 6'\, 16'' = 93976''.$$

Žádaná pravděpodobnost jest pak

$$p = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{93976}{104053} = 0{\cdot}9032\ldots \doteq \frac{28}{31}.$$

Řešení úlohy této podali pp.: *Frant. Šoreys* a *Jan V. Kubíček* z VIII. tř. a *Arnošt Rosa* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Václav Chmelař* a *Břet. Tolman* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Jar. Friedrich* z VIII. tř. g. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Frant. Lukeš* ze VII. tř. a *Gothard Nehasil* ze VI. tř. české r. v Praze, *Václav Felix* a *Jar. Chládek* z VIII. tř. g. v Žitné ul. v Praze, *Josef Bartoš* z VIII. tř. g. v Č. Budějovicích a *V. Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku.

## Řešení úlohy 19.

(Zaslal p. *Václav Felix*, stud. VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.)

Sestrojí-li se vrcholem C trojúhelníka ABC příčka, jež odtíná na půdici $\overline{AB}$ úsek $\overline{AF} = \frac{r}{n}\,\overline{AB}$, a na medianě $\overline{AD}$ úsek $\overline{AG}$, a tímtéž vrcholem přímka $\overline{CE} \;\#\; \overline{AB}$, musí prodloužená mediana bodem E procházeti. Z podobnosti $\triangle$ AFG $\sim$ $\triangle$ CGE, jde

$$\overline{AF} : \overline{CE} = \overline{AG} : \overline{GE} \quad \text{a} \quad \overline{AG} + \overline{GE} = \overline{AE},$$

tedy
$$\overline{AG} = \frac{r\,.\,\overline{AE}}{n + r}.$$

Je-li dále úsek následující, $(r + 1)$ ní příčkou na medianě spůsobený $\overline{AH}$, bude

$$\overline{AH} = \frac{(r + 1)\,\overline{AE}}{n + r + 1},$$

tudíž
$$a_{r+1} = \overline{AH} - \overline{AG} = \frac{n\,.\,\overline{AE}}{(n + r)\,(n + r + 1)}$$

a píše-li se tu $r$ místo $r+1$,

$$a_r = \frac{n \,.\, \overline{AE}}{(n+r-1)(n+r)}.$$

Z toho vyplývá, že poměr sousedních dvou dílců na medianě jest

$$a_r : a_{r-1} = (n+r+1):(n+r-1).$$

Řešení úlohy podali pp.: *Jar. Chládek* z VIII. tř. g. v Žitné ul. v Praze, *Bohuslav A. Pavlousek* ze VII. tř., *Frant. Šoreys* a *Frant. Hradilík* z VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, *Jaroslav Friedrich* z VIII. tř. g. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Václav Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku, *Lad. Červenka* ze VI. tř. r. v Pardubicích, *Josef Bartoš* z VIII. tř. g. v Č. Budějovicích a *Arnošt Rosa* ze VII. tř. g. v Nov. Bydžově.

## Řešení úlohy 20.

(Zaslal p. *Ladislav Červenka*, stud. VI. tř. r. v Pardubicích.)

Mějme lichoběžník $abcd$, v němž $ab \parallel dc$, $\overline{ab} = a$, $\overline{dc} = b$. Je-li v rameni $ad$ bod $m$ a v rameni $bc$ bod $n$ tak vytčen, že jest $an \parallel cm$, $mn \parallel ab$, jest $mn$ příčkou žádanou. Délka její $\overline{mn} = x$ vyhovuje podmínce

$$ab : mn = mn : cd$$

čili

$$x = \sqrt{ab};$$

odtud sestrojení samo sebou vyplývá.

Tato příčka dělí ramena lichoběžníka v poměru

$$\overline{am} : \overline{md} = \overline{bn} : \overline{nc} = \overline{ab} : \overline{mn} = \sqrt{a} : \sqrt{b}.$$

Protíná-li $mn$ úhlopříčny $ac$, $bd$ v bodech $p$, $q$, jest $mp = qn$, a poněvadž

$$\overline{mp} : \overline{dc} = \sqrt{a} : (\sqrt{a} + \sqrt{b}),$$

bude

$$\overline{mp} = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};$$

žádaná pak část $\overline{pq} = \overline{mn} - 2 \,.\, \overline{mp} = y$ jest

$$y = \sqrt{ab} \,.\, \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Gothard Nehasil* ze VI. tř. a *Vincenc Vodička* ze VII. tř. české realky v Praze, *Fr. Šoreys*, *Fr. Hradilík* a *Jan V. Kubíček* z VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Jar. Chládek* a *Václav Felix* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Josef Bartoš* z VIII. tř. g. v Českých Budějovicích, *Fr. J. Rybka* ze VI. tř. r. v Brně, *Lad. Otta* a *K. Vaňouček* ze VI. tř. r. v Pardubicích, *Václav Chmelař, Břetislav Tolman* ze VII. tř. a *Jind. Kurz* ze VI. tř: r. v Hr. Králové.

### Řešení úlohy 21.

(Zaslal p. *Václav Chmelař,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Užijme následujícího označení:

$$\begin{array}{lll} \sphericalangle bac = \alpha, & \sphericalangle b_1a_1c = \alpha_1, \ldots, & \sphericalangle b_na_nc = \alpha_n; \\ \sphericalangle abc = \beta, & \sphericalangle a_1b_1c = \beta_1, \ldots, & \sphericalangle a_nb_nc = \beta_n; \\ \sphericalangle acb = \gamma, & \sphericalangle a_1cb_1 = \gamma_1, \ldots, & \sphericalangle a_ncb_n = \gamma_n. \end{array}$$

Dle sestrojení v úloze vykonaného jest patrno, že

$$\begin{aligned} \alpha + 2\alpha_1 &= \pi \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= \pi \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= \pi \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1} + 2\alpha_n &= \pi. \end{aligned}$$

Násobíme-li rovnice tyto po řadě čísly

$$1, -2, 4, -8, \ldots, (-2)^{n-1},$$

obdržíme sečtouce je:

$$\alpha_n = \frac{\alpha}{(-2)^n} + \frac{(-2)^n - 1}{3\,(-2)^n}\,\pi.$$

Obdobnou hodnotu má $\beta_n$, načež $\gamma_n = \pi - (\alpha_n + \beta_n)$. Roste-li $n$ do nekonečna, blíží se zlomek $\frac{\alpha}{(-2)^n}$ nulle; hodnota zlomku

$$\frac{(-2)^n - 1}{3\,(-2)^n} = \frac{1 - \frac{1}{(-2)^n}}{3}$$

má za touže podmínkou mez rovnou $\frac{1}{3}$.

Při $\lim n = \infty$ jest tedy

$$\lim \alpha_n = \lim \beta_n = \lim \gamma_n = \frac{\pi}{3},$$

čím dokázáno tvrzení, které v úloze vysloveno.

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Břet. Tolman* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Jar. Friedrich* z VIII. tř. g. vyšš. r. g. na Malé Straně v Praze, *Václav Felix* a *Jarosl. Chládek* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Fr. Hradilík* a *Fr. Šorejs* z VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Fr. J. Rybka* ze VI. tř. r. v Brně, *Gothard Nehasil* ze VI tř. české realky v Praze a *Fr. Kosík* z VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě.

## Řešení úlohy 22.

(Zaslal p. *Fr. J. Rybka*, stud. VI. tř. r. v Brně.)

Krychli danou promítněme kolmo na rovinu $\pi$ kolmou k jedné z úhlopříčen v krychli, na př. $mn$. Průmětem bude pravidelný šestiúhelník $a_1\, b_1\, c_1\, d_1\, e_1\, f_1$. Jeli hrana krychle $\overline{ma} = h$, jest délka úhlopříčny $\overline{mn} = h\sqrt{3}$ a délka průmětu hrany

$$\overline{m_1 a_1} = \sqrt{h^2 - \left(\frac{1}{3} h\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{3} h \sqrt{6}.$$

Jest tedy ploský obsah kolmého průmětu krychle

$$P_1 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} h \sqrt{6}\right)^2 . \sqrt{3} = h^2\sqrt{3}.$$

Promítneme-li krychli v rovinu $\pi$ šikmo směrem úhlopříčny $ad$, bude průmětem šikmým šestiuhelník $m_2\, c_2\, b_2\, n_2\, f_2\, e_2$, jehož rozměry jsou

$$\overline{m_2 n_2} = 4 . \frac{3}{4} . \frac{2}{3} h\sqrt{6} = 2h\sqrt{6}$$

$$\overline{c_2 e_2} = \overline{b_2 f_2} = \frac{2}{3} h\sqrt{6} . \frac{1}{2} \sqrt{3} = h\sqrt{2},$$

a tudíž ploský obsah jeho

$$P_2 = \frac{3}{4} \overline{m_2 n_2} . \overline{c_2 e_2} = 3h^2\sqrt{3}.$$

Žádaný poměr jest

$$P_1 : P_2 = 1 : 3.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *K. Vaňouček, Lad. Otta* a *Lad. Červenka* ze VI. tř. r. v Pardubicích, *Břet. Tolman* ze VII. tř. r. v Hradci Král., *Fr. Lukeš* ze VII. tř., *A. Schwippl* a *Gothard Nehasil* ze VI. tř. české realky v Praze, *Frant. Hradilík* z VIII. tř. a *Boh. A. Pavlousek* ze VII. tř. g. v Ml. Boleslavi, *Arnošt Rosa* ze VII. tř. g. v Novém Bydžově, *Jar. Chládek* a *Václav Felix* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.

### Řešení úlohy 23.

(Zaslal p. *Jos. Zelenka,* stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci).

Má-li přímka

$$P \equiv y - 10\,A\,(x - 20) = 0$$

jdoucí bodem $m$ (20, 10) míti od bodu $p$ (14, 2) danou vzdálenosť, musí

$$\frac{8 - 6\,A}{\sqrt{1 + A^2}} = 5\sqrt{2}.$$

Podmínka tato vede k rovnici kvadratické

$$7\,A^2 + 48\,A - 7 = 0,$$

ze které vypočítáme

$$A = \frac{1}{7}, \quad A' = -7;$$

dosazením těchto směrnic do hoření rovnice obdržíme rovnice úhlopříčen žádaného čtyrúhelníka

$$P \equiv x - 7y + 50 = 0, \qquad P' \equiv 7x + y - 150 = 0.$$

Průsečíky jich s kružnicí K jsou vrcholy čtyrúhelníka $abcd$; souřadnice vrcholů těch jsou pak

$$a\,(34, 12); \quad b\,(18, 24); \quad c\,(-1, 7); \quad d\,(23, -11).$$

Odtud nalezneme délky úhlopříčen

$$\overline{ac} = u = 25\sqrt{2}, \quad \overline{bd} = u' = 25\sqrt{2}$$

a poněvadž úhlopříčny ty stojí na sobě kolmo, bude obsah čtyrúhelníka

$$P = \frac{1}{2} uu' = 625.$$

Čtyrúhelník ten jest patrně souměrným lichoběžníkem.

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Jar. Friedrich*, *Jind. Charypar* z VIII. tř. a *Jan Záhorský* ze VII. tř. g. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Václav Chmelař* a *Břet. Tolman* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Václav Felix* a *Jar. Chládek* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Frant. Hradilík*, *Fr. Šoreys*, *Jan V. Kubíček* z VIII. tř. a *Boh. A. Pavlousek* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Václav Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku, *Ervín Šámal* a *Arnošt Lilienfeld* z VIII. tř. g. v Jičíně, *Frant. Lukeš*, *Josef Nechleba*, *Vincenc Vodička* ze VII. tř. a *Gothard Nehasil* ze VI. tř. české realky v Praze, *Ant. V. Doubal* ze VI. tř. r. v Pardubicích, *Frant. Kosík* z VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě a *Josef Novák*, stud. v Praze.

---

Úloha 27.

Určiti jest součet řady

$$S = (a+b) + (a^2+ab+b^2) + \ldots + (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n).$$

*R.*

---

# Věstník literární.

## A. Hlídka programů.

**Šestá a Sedmá roční zpráva o akademii obchodní v Chrudimi za školní rok 1887—88 a 1888—89** obsahují na 82 + 62 stránkách část I.—V. a VI.—IX., tedy právě text *Arithmetiky národohospodářské* od prof. *Jana Kolouška*, o níž podána zpráva již na str. 269. roč. XVIII. Časopisu. Pokud možno souditi dle předloženého exempláře *Zpráv*, způsobila shoda textu, že obsažen i odkaz na grafické tabulky, které ale přiloženy jen samostatnému vydání. *J. Beneš.*