Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

August Kolářík
List Descartův. [II.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 7 (1878), No. 3, 146--157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122862

dina Voltův pocházela, jako svědkyně opravdového smutku do dnes strmí, jest toho zřejným důkazem. S Milaňany a Comskými sdílela smutek veškerá Italie. —

Před Alpami neučinila zpráva o smrti Voltově arci tak hluboký dojem zvláště ve Francii, což lze vysvětliti tím, že téhož dne a téměř též hodiny dokonal slavný zbudovatel „mechaniky nebes“ též svou vezdejší pouť. —

Posledních šest let žil Volta výhradně jen v kruhu své rodiny. Jeho druhdy čilý duch a bystrý rozum sklesly v úplnou lhostejnosť. Ani jmena: elektrofor, kondensator, ba ani jeho elektrický sloup nebyla s to, aby rozehřála na chvilku srdce jeho. Živost jeho zmizela úplně. Jinak bylo arci u Laplace-a, který takřka na smrtelném loži uveřejnil ještě dodatek k pátému svazku svého velkého díla.

Na uprázněné místo Voltovo zvolen do francouzské akademie věd Dr. Tomáš Young. —

---

# List Descartův.

Podává

**August Kolářík.**

(Dokončení)

## §. 5. Tečna listu Cartesiova.

1. Prochází-li přímka dvěma nekonečně blízkými body křivky, stává se její tečnou. Směrnici její obdržíme z výrazu

$$\sigma = \frac{u_1 + u_2 - u_1^2 u_2^2}{1 - u_1 u_2 (u_1 + u_2)},$$

položíme-li $u_1 = u_2 = u$

$$\tau = \frac{2u - u^4}{1 - 2u^3}$$

a rovnice její bude tedy z rovnice (11)

$$\xi (2u - u^4) - \eta (1 - 2u^3) - 3au^2 = 0 \qquad (16)$$

Rovnice tato je vzhledem k $u$ stupně čtvrtého, lze tedy každým bodem mimo křivku vésti 4 tečny a tudíž jest list Cartesiův čtvrté třídy.

Chceme-li na místo parametru $u$ zavésti do rovnice orthogonalné souřadnice $x$ a $y$ bodu dotýčného, víme, že jest

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

jelikož $F \equiv x^3 + y^3 - 3\,axy = 0$, bude

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3\,(x^2 - ay), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3\,(y^2 - ax).$$

Rovnice tečny jest pak

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0,$$

v našem případě tedy

$$\xi\,(x^2 - ay) + \eta(y^2 - ax) - axy = 0 \;\ldots \qquad (17)$$

Každá tečna protíná křivku ještě v jednom bodu $a$, kterýž tangencialním bodem bodu dotyčného jest, jehož parametr

$$u' = - \frac{1}{u^2}.$$

Z rovnice této vychází, že obdržíme totéž $u'$ pro $+u$ i pro $-u$, což se vyjadřuje následovně:

„dva sdružené body mají tentýž bod tangencialní aneb, každým bodem listu Cartesiova procházejí dvě tečny, které se křivky ve dvou sdružených bodech dotýkají.“

„Jsou-li dány 3 body na přímce $P$, náleží jim tři body tangencialní, které též na přímce $P'$ leží“.

Neboť, jsou-li $a_1\ a_2\ a_3$ body průsečné přímky $P$ a křivky $a'_1\ a'_2\ a'_3$ příslušné body tangencialní, bude

$$u_1{}^2 u_1 = -1, \; u_2{}^2 u_2 = -1, \; u_3{}^2 u_3 = -1.$$

Znásobíme-li rovnice tyto, tu po dosazení $u_1\ u_2\ u_3 = -1$ vyjde též

$$u'_1\ u'_2\ u'_3 = -1$$

a tudíž i $a'_1\ a'_2\ a'_3$ na přímce se nalezají.

Tato vlastnosť náleží všem křivkám stupně třetího. Přímka $P'$, která ony tangencialní body spojuje, slove přímkou přidruženou ku $P$. Spojuje-li $P$ dva sdružené body, stává se $P'$ tečnou v bodu tangencialním.

Je-li $Bx + By + 1 = 0$ rovnice přímky původní $P$, namítá se otázka, jaká asi bude rovnice přímky přidružené $P'$?

Píšeme-li opět ve tvaru $A'x + B'y + 1 = 0$, jedná se o určení veličin $A'$ a $B'$ co funkcí veličin $A$, a $B$.

Dle rovnic na stránce 118. uvedených musí býti

$$\alpha \equiv \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \frac{1}{u_3^2} = 3a\,B'$$

$$\beta \equiv \frac{1}{u_1^2\,u_2^2} + \frac{1}{u_2^2\,u_3^2} + \frac{1}{u_1^2\,u_3^2} = 3a\,A'$$

jsou-li $u_1\,u_2\,u_3$ parametry bodů průsečných, tudíž kořeny rovnice

$$u^3 + 3a\,Bu^2 + 3a\,A\,u + 1 = 0.$$

Výrazy $\alpha$ a $\beta$ jsou však symmetrické funkce kořenů této rovnice a dají se následovně co funkce součinitelů vyjádřiti.*) Z rovnic

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_1u_3 = 3a\,A \text{ a } u_1 + u_2 + u_3 = 3a\,B$$

jde

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2\,(u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1) = 9a^2\,B^2$$

čili

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 9a^2B^2 - 6a\,A$$

a jelikož jest $u_1^2u_2^2u_3^2 = 1$, bude

$$\frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{u_1^2\,u_2^2\,u_3^2} = \frac{1}{u_1^2\,u_2^2} + \frac{1}{u_2^2\,u_3^2} + \frac{1}{u_3^2\,u_1^2}$$

$$= 3a\,(3a\,B^2 - 2A) = 3a\,A',$$

z čehož plyne

$$A' = 3a\,B^2 - 2A.$$

Podobně jest

$$u_1^2u_2^2 + u_2^2u_3^2 + u_3^2u_1^2 + 2u_1\,u_2\,u_3\,(u_1 + u_2 + u_3) = 9a^2\,A^2$$

čili

$$u_1^2\,u_2^2 + u_2^2\,u_3^2 + u_3^2\,u_1^2 = 9a^2\,A^2 - 6a\,B,$$

z čehož vychází

$$\frac{u_1^2u_2^2 + u_2^2u_3^2 + u_3^2u_1^2}{u_1^2\,u_2^2\,u_3^2} = \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \frac{1}{u_3^2}$$

$$= 9a^2\,A^2 - 6a\,B = 3a\,B',$$

tudíž

$$B' = 3a\,A^2 - 2B.$$

Bude tedy rovnice přímky přidružené zníti:

$$P' \equiv (3a\,B^2 - 2A)\,x + (3a\,A^2 - 2B)\,y + 1 = 0. \qquad (18)$$

*) Balzer-Pokorný str. 235.

Stane-li se přímka průsečná přímkou úběžnou, tu $x$ i $y$ bodů průsečných jsou nekonečné. Podmínka, by tyto veličiny staly se $\infty$, jest

$$u^3 + 1 = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou

$$u_1 = -1,\ u_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ u_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

z čehož jde, že list Descartesův má tři body úběžné, z nichž jeden realný jest. Vložíme-li hodnoty tyto do všeobecné rovnice tečny křivky naší, obdržíme rovnice asymptot a sice

$$A_1 \equiv \xi + \eta + a = 0$$
$$A_2 \equiv (1 - i\sqrt{3})\,\xi + (1 + i\sqrt{3})\,\eta - 2a = 0$$
$$A_3 \equiv (1 + i\sqrt{3})\,\xi + (1 - i\sqrt{3})\,\eta - 2a = 0.$$

„Má tudíž list Descartesův jednu reálnou a dvě pomyslné asymptoty."

„Realná asymptota utíná na osách $X$ a $Y$ délky $-a$". Uvážíme-li, že list Descartův je křivka stupně třetího, 4. třídy s jedním bodem dvojným, tu dosadíme-li do Plückerových rovnic

$$m = n\,(n-1) - 2\delta - 3k \qquad (\alpha)$$
$$i = 3n\,(n-2) - 6\delta - 8k \qquad (\beta)$$
$$2\,(\delta - \tau) = (n - m)\,(n + m - 9) \qquad (\gamma)$$

za $n = 3$, $m = 4$, $\delta = 1$ (neboť $n$ značí stupeň křivky, $m$ třídu, $\delta$ počet bodů dvojnásobných, $\tau$ počet tečen dvojnásobných a $i$ počet bodů obratu), obdržíme

$$k = \tau = 0,\ i = 3,$$

z čehož jde:

„List Cartesiův nemá žádného bodu úvratu neb návratu, ale tři body obratu."

Abychom parametry bodů obratu nalezli, uvažme, že tečna obratu má tři soumezné body s křivkou společné a tedy že má platnosť rovnice

$$u^3 + 1 = 0,$$

z níž plynou parametry bodů obratu:

$$u_1 = -1,\ u_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ u_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Porovnáme-li tento výsledek s předešlým, shledáváme, že „úběžné body listu Cartesiova jsou zároveň jeho body obratu, následovně asymptoty tečnami obratu (Inflexionstangenten)."

§. 5. **Normála a evoluta.**

Rovnice normaly v bodu, jehož souřadnice jsou $x$ a $y$, jest obecně

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(\eta - y) = 0,$$

a pro naši křivku

$$(y^2 - ax)(\xi - x) - (x^2 - ay)(\eta - y) = 0 \qquad (19)$$

čili

$$\xi(y^2 - ax) - \eta(x^2 - ay) + a(x^2 - y^2) + xy(x - y) = 0. \qquad (20)$$

Chceme-li zavésti parametr $u$, pišme do rovnice (19) za $x$ a $y$ hodnoty

$$x = \frac{3au}{1+u^3},\ y = \frac{3au^2}{1+u^3}.$$

Po zjednodušení obdržíme

$$\left(\xi - \frac{3au}{1+u^3}\right)(1 - 2u^3) + \left(\eta - \frac{3au^2}{1+u^3}\right)(2u - u^4) = 0$$

čili

$$\xi(1+u^3)(1-2u^3) + \eta(1+u^3)(2u-u^4) - 3au(1+2u^2-2u^3-u^5) = 0. \qquad (21)$$

Rovnice ta je podle $u$ stupně 7., z čehož následuje, že „daným bodem lze 7 normal k listu Cartesiovu vésti.“ Normaly ty mohou býti po dvou imaginarné.

Jelikož normaly křivky jsou tečnami její evoluty, jest k evolutě křivky naší bodem mimo 7 tečen vésti, z čehož jde že „evoluta listu Descartesova jest křivka sedmé třídy.“

Rovnici této evoluty bychom obdrželi, differencujíce rovnici (21) dle parametru $u$ a vyloučíce pak tento z obou rovnic.

§. 7. **Tangenta, normála, subtangenta a subnormála.**

Čtyry tyto analytické veličiny ustanovíme dle známých vzorců *)

$$T = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2},\ N = y\sqrt{1+y'^2},\ St = \frac{y}{y'},\ S_n = yy' \text{ *)}$$

Nejlépe jest vyjádřiti tu veličiny ty co funkce parametru $u$, a sice jest

$$y = \frac{3au^2}{1+u^3},\ y' = \frac{2u - u^4}{1 - 2u^3}.$$

*) Základové v. mathematiky. Studnička I. str. 162. druhé vyd. 158.

Vložíme-li tyto hodnoty do hořejších vzorců, obdržíme po příslušných redukcích:

$$T = \frac{3au}{(1+u^3)(1-2u^3)} \sqrt{(1-2u^3)^2 + (2u - u^4)^2}$$

$$= \frac{3au}{(1+u^3)(1-2u^2)} \sqrt{1+4u^2-4u^3-4u^5+4u^6+u^8},$$

$$N = \frac{3au^2}{(1+u^3)(1-2u^3)} \sqrt{(1-2u^3)^2 + (2u-u^4)^2}$$

$$= \frac{3au^2}{(1+u^3)(1-2u^3)} \sqrt{1+4u^2-4u^3-4u^5+4u^6+4u^8},$$

$$St = \frac{3au\,(1-2u^3)}{(1+u^3)(2-u^3)}, \quad S_n = \frac{3au^2\,(2-u^3)}{(1+u^3)(1-2u^3)}.$$

Pro $u = 1$ bude

$$T = \frac{3}{2} a \sqrt{2}, \quad N = -\frac{3}{2} a \sqrt{2}, \quad St = -\frac{3a}{2}, \quad S_n = -\frac{3a}{2}.$$

Hledíme-li k bodu $a$, jehož parametr jest $u$, a k bodu $a'$ s parametrem $u' = \dfrac{1}{u}$ a značíme-li k němu příslušnou subtangentu $S_t'$ a subnormalu $S_n'$, bude

$$S_t' = \frac{\dfrac{3a}{u}\left(1-\dfrac{2}{u^3}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{u^3}\right)\left(2-\dfrac{1}{u^3}\right)} = \frac{3au^2\,(2-u^3)}{(1+u^3)(1-2u^3)},$$

z čehož jde

$$u\,S_t' = S_n.$$

Podobně jest

$$S_n' = \frac{3a\,(1-2u^3)}{(1+u^3)(2-u^3)},$$

tedy

$$u\,S_n' = S_t.$$

Pro polarní tangentu, normalu atd. máme vzorce

$$T_1 = \frac{r}{r'} \sqrt{r^2 + r'^2}, \quad N_1 = \sqrt{r^2 + r'^2}, \quad S_t' = \frac{r^2}{r'}, \quad S_{n1} = r' \text{ *)}$$

Jak snadno se vyvoditi dá, je

$$r = \frac{3au}{1+u^3} \sqrt{1+u^2},$$

tedy

*) Tamtéž strana 179. druhé vyd. str. 182.

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = \frac{dr}{du} \frac{1}{cos^2\varphi} = \frac{dr}{du} \sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{dr}{du} = 3a \frac{1-2u^3-u^5}{(1+u^3)^2 \sqrt{1+u^2}}.$$

Následovně jest

$$r' = \frac{3a(1+2u^2-2u^3-u^5)}{(1+u^3)^2}.$$

Dosazením těchto hodnot do vzorců hořejších vyjde:

$$T_1 = \frac{3a\sqrt{1+u^2}}{(1+u^3)(1+2u^2-2u^3-u^5)} \sqrt{u^2(1+u^2)(1+u^3)^2+(1+2u^2-2u^3-u^5)}$$

$$= \frac{3a\sqrt{1+u^2}}{(1+u^3)(1+2u^2-2u^3-u^5)}.$$

$$\cdot \sqrt{1+5u^2-4u^3+5u^4-8u^5+4u^6-2u^7+u^8+4u^9+2u^{10}}$$

$$N_1 = \frac{3a}{(1+u^3)^2}.$$

$$.\sqrt{1+5u^2-4u^4+5u^4-8u^5+4u^6-2u^7+u^8+4u^9+2u^{10}}$$

$$S_{t1} = \frac{3au^2(1+u^2)}{1+2u^2-2u^3-u^5}, \quad S_{n1} = \frac{3a(1+u^2-2u^3-u^5)}{(1+u^3)^2}.$$

### §. 8. Souvislost kružnice a listu Cartesiova.

Křivka kruhová co křivka stupně druhého protíná list Descartův v 6 bodech, které jsou buď

všecky realné
aneb 4 realné a 2 pomyslné,
aneb 2 realné a 4 pomyslné
aneb všecky pomyslné.

Parametry jich obdržíme, položíce do rovnice

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

za $x$ a $y$ hodnoty z rovnic (9), čímž povstane

$$9a^2u^2(1+u^2) - 6au(\alpha+\beta u)(1+u^3) + \gamma(1+u^3)^2 = 0$$

čili

$$f(u) = \gamma u^6 - 6a\beta u^5 + 3a(3a-2\alpha)u^4 + 2\gamma u^3 + 3a(3a-2\beta)u^2$$
$$-6a\alpha u + \gamma = 0. \qquad (22)$$

Označíme-li symbolem $\Sigma(u)_n$ součet kombinací $n$-té třídy z prvků $u_1\ u_2 \ldots u_6$, shledáme, že mezi parametry všech 6ti průsečných bodů platí následující jednoduché, od polohy a velikosti kružnice neodvislé relace:

$$\Sigma(u)_3 = -2, \quad \Sigma(u)_6 = +1, \tag{23}$$

kterouž poslední rovnici lze též psáti

$$u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 = 1 \tag{24}$$

aneb

$$tg\,\varphi_1\, tg\,\varphi_2\, tg\,\varphi_3\, tg\,\varphi_4\, tg\,\varphi_5\, tg\,\varphi_6 = 1.$$

Důležitá jest zde kružnice křivosti, pro kterou jest $u_4 = u_5 = u_6 = u$ a kteráž ještě křivku ve třech bodech protíná.

Rovnice hořejší přejdou tu v následující

$$u^3 u_1 u_2 u_3 = 1, \quad u(u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1) + u_1 u_2 u_3 = -2,$$

z nichž jde

$$(u)_2 = -\frac{2u^3+1}{u^4}, \quad (u)_3 = \frac{1}{u^3}.$$

Jedná-li se o ustanovení kružnice křivosti v bodě, jehož parametr jest $u$, třeba v rovnici (22) veličiny $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tak ustanoviti, aby měla tři sobě rovné kořeny. Pak ale musí též

$$f'(u) = 0 \text{ i } f''(u) = 0,$$

čili

$$\left.\begin{aligned} &\gamma u^5 - 5a\beta u^4 + 2a(3a-2\alpha)u^3 + \gamma u^2 + a(3a-2\beta)u - \alpha a = 0 \\ &5\gamma u^4 + 8a(3a-2\alpha)u^2 + 2\gamma u + a(3a-2\beta) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Z těchto dvou rovnic a z rovnice (22) se snadno $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ ustanoví.

Jest pak $\alpha$ úsečka, $\beta$ pořadnice příslušného středu křivosti, kdežto poloměr $\varrho$ bude se rovnati $\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma}$.

Kratčeji lze k témuž výsledku přijíti užitím známých vzorců. Jest totiž

$$\varrho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad \alpha = x - y'\frac{1+y'^2}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Poněvadž jest $y' = \dfrac{2u-u^4}{1-2u^3}$, bude

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Z rovnic (9) následuje

$$\frac{dy'}{du} = \frac{2(1+u^3)^2}{(1-2u^3)^2},$$

a tudíž

$$y'' = \frac{2}{3a}\left(\frac{1+u^3}{1-2u^3}\right)^3.$$

Tyto hodnoty vloženy jsouce do hořejších vzorců dávají:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho &= \frac{3a}{2}\frac{[(1-2u^3)^2+(2u-u^4)^2]^{3/2}}{(1+u^3)^3} \\
\text{neb}\quad \varrho &= \frac{3a}{2}\left[\frac{\sqrt{1+4u^2-4u^3-4u^5+4u^6+u^8}}{1+u^3}\right]^3, \\
\alpha &= \frac{3au}{2(1+u^3)^3}[2(1+u^3)^2+(1-2u^3)(1+4u^2-4u^3-4u^5+4u^6+u^8] \\
\beta &= \frac{3a}{2(1+u^3)^3}[2u^2(1+u^3)^2+(1-2u^3)(1+4u^2-4u^3-4u^5+4u^6+u^8)]
\end{aligned}\right\}(27)$$

Chceme-li ku př. znáti poloměr křivosti v bodu dvojném, položme $u=0$, tu pak

$$\varrho_0 = \frac{3a}{2},\quad \alpha_0 = 0,\quad \beta_0 = \frac{3a}{2},$$

Rovnice kruhu křivosti v tomto bodu bude

$$\Gamma_0 \equiv x^2+y^2-3ax=0, \text{ a neb } \Gamma'_0 \equiv x^2+y^2-3ay=0,$$

z čehož jde, že tato křivku naší ještě v bodu $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{3}\right)$ protíná.

Pro $u=1$ bude $\varrho_1 = \frac{3a\sqrt{2}}{8}, \alpha_1 = \beta_1 = \frac{9a}{8}$

## §. 9. Sestrojení listu Descartesova.

1. Předpokládáme-li bod dvojný za střed svazku paprsků, můžeme na každém paprsku sestrojiti bod způsobem následujícím:

Opišme poloměrem $3a$ z počátku soustavy kružnici — tu pak, jelikož $u = tg\,\varphi$, bude

$$\overline{ad} = 3au,\ od = 3a\sqrt{1+u^2},\ af = 3au^3.$$

Učiníme-li tedy $\overline{ag} = \overline{af}$, $-oh = \overline{ad}$ a vedeme-li $\overline{hi} \parallel \overline{dg}$, bude

$$\frac{\overline{oi}}{\overline{oh}} = \frac{\overline{od}}{\overline{og}},$$

následovně pak

$$\overline{oi} = \frac{\overline{od}\,.\,\overline{oh}}{\overline{og}} = \frac{3a\sqrt{1+u^2}\,.\,3au}{3a+3au^3} = \frac{3au}{1+u^3}\sqrt{1+u^2} = r$$

a tudíž bod i bodem hledaným.

2. Každý průvodič listu Descartova procházející bodem dvojným má určitou délku $r$. Sestrojíme-li však na každém paprsku bod $m_1$, jehož průvodič je $r_1$, tak aby

$$rr_1 = a^2$$

obdržíme z listu našeho novou křivku. Rovnice její jest

$$r_1 = \frac{a^2}{r} = \frac{a^2(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{3a \sin\varphi \cos\varphi} = \frac{a}{3}(\sin\varphi\, tg\,\varphi + \cos\varphi\, cotg\,\varphi) \quad (28)$$

Dle této rovnice sestrojí se následovně:

Poloměrem $\frac{a}{3}$ opiš křivku kruhovou $K_1$, věd tečnu $T_b$, která daný paprsek $C$ v bodu $c$ protíná, načež veď $cd \perp x$, $de \perp C$, $fm_1 \parallel y$ a jest pak $m_1$ bodem křivky hledané.

Neboť

$$\overline{om_1} = \overline{oe} + \overline{em_1} = od \cos\varphi + m_1 f \sin\varphi$$
$$= \frac{a}{3} cotg\,\varphi \cos\varphi + \frac{a}{3} tg\,\varphi \sin\varphi,$$

tedy

$$\overline{om_1} = r_1.$$

Křivka tato má $x$ a $y$ za asymptoty.

Z každého bodu odvodíme bod listu Descartesova na základě věty:

Každý bod listu Cartesiova jest polem poláry příslušného bodu křivky sestrojené vzhledem ku křivce kruhové poloměrem $a$ z počátku soustavy opsané. Neboť jest patrně

$$\overline{om_1} \,.\, \overline{om} = a^2, \text{ tedy } rr_1 = a^2.$$

3. K velmi výhodné konstrukci listu Cartesiova přijdeme, myslíme-li si z něho odvozenou křivku způsobem následujícím: Buď $P$ libovolný paprsek svazku $o$, $i$ bod průsečný s křivkou $K$, $i'$ tak bod průseční $A$ (asymptotou). Sestrojme bod $i_1$ aby, $i' i_1 = i\, o$.

Bychom vyšetřili $K_1$ co geometrické místo bodu $i_1$, mysleme si rovnici křivky $K$ vzhledem k osám $X'$ a $Y'$.

Mezi souřadnicemi bodu $i$, $i'$ a $i_1$ panuje tato souvislosť

$$x_1 = x' - x,$$
$$y_1 = y' - y. \quad (\alpha)$$

Při tom jest

$$x' = -\frac{a}{\sqrt{2}},\ y' = -\frac{aA'}{\sqrt{2}}, \text{ je-li } A' = tg\,(\widehat{XP}).$$

Pomocí $A'$ lze též vyjádřiti $x$ a $y$ z rovnic (7), položíme-li totiž $A' = \frac{y}{x}$. Obdržíme

$$x(1 + 3A'^2) - \frac{3a}{\sqrt{2}}(1 - A'^2) = 0,$$

tedy

$$x = \frac{3a(1 - A'^2)}{\sqrt{2}(1 + 3A'^2)}, \quad y = \frac{3aA'(1 - A'^2)}{\sqrt{2}(1 + 3A'^2)}$$

Následovně jest

$$x_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3(1 - A'^2}{1 + 3A'^2}\right) = -\frac{4a}{\sqrt{2}(1 + 3A'^2)} \qquad (\beta)$$

$$y_1 = -\frac{aA'}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3(1 - A'^2)}{1(1 + 3A'^2)}\right) = -\frac{4aA'}{\sqrt{2}(1 + 3A'^2} \qquad (\gamma)$$

Vyloučíme-li z rovnic ($\beta$) a ($\gamma$) parametr $A'$, bude výsledek eliminace rovnice křivky odvozené ($K_1$). Nejsnáze docílíme toho uváživše, že $\frac{J_1}{x_1} = A'$ a vloživše to do rovnice ($\beta$); po redukci obdržíme

$$y_1^2 = -\frac{2a\sqrt{2}}{3} x_1 - \frac{x_1^2}{3},$$

z čehož shledáváme, že křivka $K_1$ jest ellipsa, mající bod $o$ za vrchol a $X'$ za osu hlavní.

Poloosy její jsou

$$\alpha' = a\sqrt{2}, \ \beta' = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Sestrojíme-li nejprvé kuželosečku $K_1$, kteráž též body $k$, $l$ procházeti musí, lze pak pomocí ní celou křivku snadno sestrojiti.

*Poznámka:* Namítá se ještě otázka: „jak sestrojiti tečnu v bodu křivky“?

K tomu účelu vyhoví rovnice platící o parametru bodu tangencialního

$$u' = -\frac{1}{u^2}.$$

Dle obrazce jest

$$i\alpha_1 = o\alpha_1 \,.\, tg\,\varphi = o\alpha_1 \,.\, u,$$

$$\alpha_1 \gamma_1 = \alpha_1 \delta_1 = o\alpha_1 . u^2, \ tg\,\lambda = \frac{o\alpha_1 . u^2}{o\alpha_1} = u^2,$$

$$tg\,\varphi' = -\frac{1}{tg\,\lambda} = -\frac{1}{u^2},$$

následovně jest $i''$ bodem tangenciálním — a tedy $i''$ i tečna v bodu $i$.

Zobrazení tečny této, jakož i všecky tři způsoby sestrojení křivky naší ve spojení jsou v obraze 4.

*Poznámka 2.* K zajímavým výsledkům přicházíme, ustanovujeme-li plochu omezenou kličkou $P_0$ a pak plochu omezenou částí druhou a asymptotou ($P_1$). Jest zde

$$P_0 = P_1 = \frac{3a^2}{2}$$

Těžiště obou těchto ploch leží na $X'$ a sice při ploše $P_0$ je úsečka jeho $X'_0 = \frac{8a\pi}{9\sqrt{6}}$ u druhé je $X'_1 = -\frac{4a\pi}{9\sqrt{6}}$.

Otáčí-li se celá křivka kolem osy $Y'$, vytvoří $P_0$ těleso $T_0$ a $P_1$ těleso $T_1$, kdež

$$T_1 = \frac{1}{2} T_0 = 5{\cdot}37234\, a^3.$$

---

# Přehled novějších pokroků v astronomii.

Sepsal

Dr. **A. Seydler**

(Pokračování.)

### 3. Výzkumy teleskopické na kraji slunce.

Kdežto pozorování povrchu slunečného bylo od vynalezení dalekohledu možné v každý jasný den, byli naproti tomu astronomové v ohledání kraje slunečného obmezeni na vzácné ty chvíle, v kterých světlo slunce měsícem zastřené dovolovalo spatřiti podrobnosti na okraji jeho, jindy neviditelné. Než ačkoliv velmi záhy byla pozornost jak učenců tak i obecenstva nejširšího