Rudolf Piska

Jisté zobecnění Bernoulli-ovy kvartiky

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 71 (1946), No. Suppl., D58--D61

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122828

Jisté zobecnění Bernoulli-ovy kvartiky.

(Konstrukce tečny a středu křivosti.)

Rudolf Piska, Kroměříž.

1. Pohybuje-li se úsečka AB konstantní délky ϱ svými koncovými body A, B po dvou k sobě kolmých trajektoriích (a) a (b) a jiná úsečka BC o délce r — předpokládejme $r > \varrho$ — tak, že bod C se posouvá při pohybu úsečky AB po přímé dráze procházející stále bodem A rovnoběžně s trajektorií (b), pak výsledná *trajektorie* (c) bodu C *je křivka stupně čtvrtého*, známá pro vztah $r = \varrho\sqrt{2}$ jako Bernoulliova kvartika.

Zvolíme-li trajektorie (a), (b) za osy pravoúhlého souřadnicového systému a je-li $p^2 + q^2 = \varrho^2$, pak pro souřadnice bodu C platí vztahy

$$\begin{aligned} x &= p \\ y &= \sqrt{\varrho^2 - p^2} + \sqrt{r^2 - p^2}. \end{aligned} \tag{1,1}$$

Po úpravě dostaneme

$$y = \sqrt{\varrho^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2}, \tag{1,2}$$

nebo konečně

$$y^2 (4x^2 + y^2) - 2y^2 (r^2 + \varrho^2) + (r^2 - \varrho^2)^2 = 0. \tag{1,3}$$

Z rovnice (1,3) plyne, že křivka je souměrná dle souřadnicových os. Osu y protíná v bodech V $(0; \pm r \pm \varrho)$. Dvě dvojice dvojnásobných tečen mají rovnice

$$\begin{aligned} t_{1,2} &\equiv x = \pm \varrho \\ t_{3,4} &\equiv y = \pm \frac{r^2 - \varrho^2}{r\varrho} x. \end{aligned} \tag{1,4}$$

Dotykové body mají souřadnice $T_{1,2}$ $(\pm \varrho; \pm \sqrt{r^2 - \varrho^2})$,

$$T_{3,4} \left(\pm \frac{r\varrho}{r^2 + \varrho^2}; \pm \frac{r^2 - \varrho^2}{r^2 + \varrho^2} \right).$$

Z rovnice (1,2) plyne ještě jiná známá konstrukce křivky. Opíšeme-li poloměry r a ϱ dvě soustředné kružnice, pak pro pořadnice bodů L křivky platí zřejmě vztah $\overline{QL} = \overline{QM} - \overline{QP} = \overline{PM}$. (Viz obr. 1.)

Jiná zajímavá vlastnost křivky je ta, že plocha omezená uzavřenou částí křivky je nezávislá na velikosti délky úsečky r, pokud $r \geqq \varrho$, a rovná se obsahu kruhu o poloměru ϱ. Je totiž

$$P = \int_{-\varrho}^{\varrho} y \, dx = \int_{-\varrho}^{\varrho} (\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{\varrho^2 - x^2}) \, dx - \quad (1,5)$$

$$- \int_{-\varrho}^{\varrho} (\sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{\varrho^2 - x^2}) \, dx = 2 \int_{-\varrho}^{\varrho} \sqrt{\varrho^2 - x^2} \, dx = \pi \varrho^2.$$

2. Zvláštní případy.

a) $\varrho = r$: Rovnice (1,3) má tvar

$$y^2 (4x^2 + y^2 - 4\varrho^2) = 0 \quad (2,1)$$

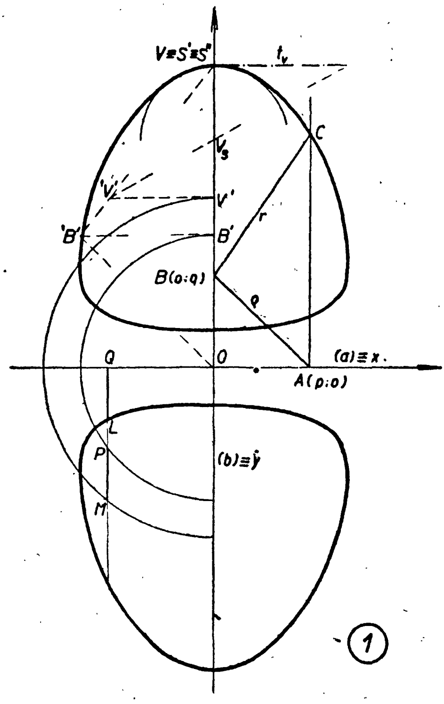
a křivka se rozpadá ve dvojnásobně branou osu x a elipsu o poloosách ϱ a 2ϱ s delší osou v souřadnicové ose y.

b) $r = \varrho\sqrt{2}$: Pro tuto podmínku obdržíme rovnici Bernoulliovy kvartiky

$$y^2 (4x^2 + y^2) - 6\varrho^2 y^2 + \varrho^4 = 0. \quad (2,2)$$

3. Konstrukce tečny (normály).

Při pohybu úsečky AB po dvou k sobě kolmých, přímých trajektoriích (a), (b) vykonává bod C jednak posuvný pohyb po přímé dráze $AC \parallel (b)$ (viz obr. 2), jednak rotační pohyb kolem bodu B. Dovedeme-li určit rychlosti a směry těchto dvou pohybů, pak směr a velikost rychlosti výsledného pohybu bodu C — tedy tečna — budou dány úhlopříčkou v rovnoběžníku oněch dvou rychlostí.

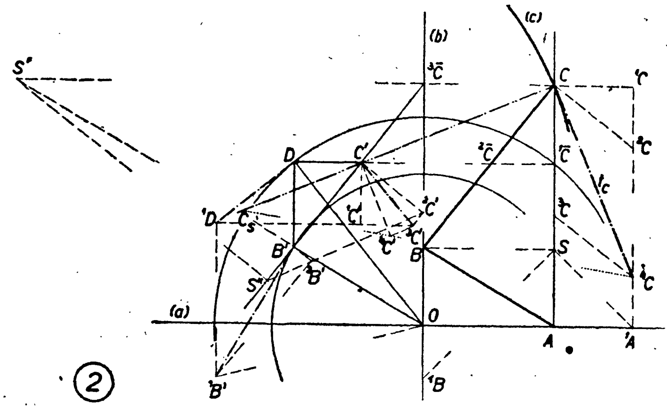


1

Okamžitý střed otáčení úsečky AB pro vytčenou polohu (viz obr. 2) je průsečík S normál k trajektoriím (a), (b) v bodech A, B. Zvolíme-li jednotkovou rychlost otáčení, pak rychlost bodu A v trajektorii (a) je $\overline{A^1A} \perp \overline{SA}$. Rychlost bodu C ve směru rovnoběžném s A^1A je vyjádřena délkou $\overline{C^1C} \# \overline{A^1A}$.

Hledáme-li rychlost C^2C bodu ve směru $C^2C \perp BC$, je ${}^2C$ v průsečíku $C^2C \perp BC$ a ${}^1A^1C$. Rychlost bodu C ve směru CA je směrem i velikostí stejná jako rychlost bodu B v trajektorii (b). Je tedy $\overline{C^3C} \#\, \overline{B^1B} \perp \overline{BS} = \overline{AO}$.

Směr a velikost výsledné rychlosti bodu C je pak dán úhlopříčkou $\overline{C^4C}$ v rovnoběžníku ${}^2CC^3C^4C$. Je to hledaná tečna trajektorie (c). Je tedy konstrukce tečny velmi jednoduchá. Stačí popsaným způsobem určit bod ${}^2C$ a na spojnici ${}^2C^1A$ bod ${}^4C$, při čemž ${}^2\overline{C^4C} = \overline{AO}$. Spojnice C^4C je tečna t_c.



②

Otočíme-li bod C ^{4}kolem C do normály n_c do bodu C', určuje úsečka CC' t. zv. kolmou rychlost bodu C. Otočíme-li o tentýž úhel současně body ${}^1C$, ${}^2C$, ${}^3C$ do poloh ${}^1\overline{C}$, ${}^2\overline{C}$, ${}^3\overline{C}$, je bod ${}^1\overline{C}$ v průsečíku kružnice o středu O a poloměru r se spojnicí CA. Bod ${}^3\overline{C}$ je pak patou kolmice vedené z bodu C na trajektorii (b). Ježto bod ${}^2C$ padne po otočení do ${}^2\overline{C}$ na CB, jest také spojnice ${}^3\overline{C}C' \parallel CB$. Z toho plyne jednoduchá konstrukce bodu C' normály n_c. Sestrojíme bod ${}^3\overline{C}$ na trajektorii (b) a bod ${}^1\overline{C}$ na spojnici CA. Bod C' je v průsečíku ${}^3\overline{C}C \parallel CB$ a ${}^1\overline{C}C' \perp (b)$.

4. Konstrukce středu křivosti.

Střed křivosti C_s trajektorie (c) v bodě C stanovíme jako okamžitý střed otáčení normály n_c. Za tím účelem je nutno znát rychlosti dvou bodů normály n_c. Jako prvý vezmeme bod C, jehož rychlost C^4C známe, dále bod C', jehož otáčecí rychlost stanovíme takto:

Bod C' proběhne trajektorii (c'), jejíž jednotlivé body můžeme sestrojit také následujícím způsobem: Bod C' leží na spojnici ${}^3\overline{C}B'$, kde B' je v průsečíku spojnice ${}^3\overline{C}B' \# \overline{CB}$ a $\overline{OB'} \# \overline{AB}$. B' se zřejmě pohybuje po kružnici o poloměru $\overline{AB}$ se středem v průsečíku trajektorií (a) a (b). Sestrojíme-li bod D (je souměrně sdružený k ${}^1\overline{C}$ dle trajektorie (b)) jako průsečík kružnice o středu O a poloměru r s přímkou $B'D \parallel (b)$, pak je vidět, že bod C' je také průsečíkem spojnice ${}^3\overline{C}B'$ a $DC' \parallel (a)$.

Známe-li výtvarný zákon trajektorie (c'), můžeme snadno stanovit tečnu t_c' v bodě C' trajektorie (c') a tím potřebnou rychlost. Rychlost bodu C' závisí opět na pohybu přímek ${}^3\overline{C}B'$ a DC'. Bod B' má při otáčení kolem středu O stejnou úhlovou rychlost jako bod B při otáčení kolem okamžitého středu otáčení S. Je tedy $\overline{B'{}^1B'} \perp \overline{OB'}$. Pak rychlost $B'{}^2B'$ bodu B' ve směru kolmém na $B'C'$ je průsečíkem přímek $B'{}^2B' \perp B'{}^3\overline{C}$ a ${}^1B'{}^2B' \parallel B'{}^3\overline{C}$. Úsečka $B'\,\overline{C}$ obaluje při daném pohybu křivku a její bod dotyku S'' s touto křivkou je okamžitým středem otáčení pro kotálení spojnice $B'{}^3\overline{C}$ po této křivce. S'' je patou kolmice $S'S''$ vedené okamžitým pólem S' ke spojnici $B'{}^3\overline{C}$. Okamžitý pól S' jest v průsečíku normály ${}^3\overline{C}S'$ k trajektorii (b) se spojnicí OB'.

Je tedy rychlost $C'{}^2C'$ bodu C' ve směru kolmém na $B'C'$ v průsečíku spojnice $S''{}^2B'$ a kolmice ${}^2C'C' \perp C'B'$.

Jelikož spojnice $B'D$ zůstává při otáčení bodu B' kolem O stále rovnoběžná s trajektorií (b), je rychlost bodu D při rotaci kolem středu O stanovena úsečkou $D{}^1D$, kde ${}^1D$ je v průsečíku spojnice ${}^1B'{}^1D \parallel B'D$ se spojnicí ${}^1DD \perp DO$. Okamžitý střed otáčení spojnice DC' je v prodloužení DC' v nekonečnu. Je tedy rychlost $C'{}^1C'$ bodu C' ve směru kolmém na DC' rovna $D{}^2D$ směrem i velikostí, kde bod ${}^2D$ je v průsečíku ${}^1D{}^2D \parallel DC'$ a $D{}^1D \perp DC'$.

Koncový bod ${}^3C'$ výsledné rychlosti $C'{}^3C'$ bodu C' je průsečíkem spojnice ${}^1C'{}^3C' \parallel DC'$ a ${}^2C'{}^3C' \parallel B'C'$. Spojnice $C'{}^3C'$ je tečnou trajektorie (c') bodu C' pro vytčenou polohu.

Stanovíme-li nyní rychlost $C'{}^4C'$ bodu C' ve směru rovnoběžném s rychlostí $C{}^4C$ trajektorie (c), pak spojnice ${}^4C{}^4C'$ protíná normálu n_c v okamžitém středu otáčení C_s, čili ve středu křivosti trajektorie (c) v bodě C. Bod ${}^4C'$ je v průsečíku ${}^3C'{}^4C' \parallel n_c$ a $C'{}^4C' \perp n_c$.

Popsaná konstrukce se velmi zjednoduší při stanovení poloměrů křivosti ve vrcholech křivky, tedy v průsečících křivky s trajektorií (b). Označíme-li průsečík V, pak tečna t_v je kolmá k trajektorii (b) a rychlost bodu V rovná se délkou ϱ (viz obr. 1). Bod V' kolmé rychlosti nachází se v průsečíku kružnice o středu O a poloměru r s trajektorií (b). Okamžitý pól S' splyne s S'' v bodě V. Ježto rychlost $B'{}^1B'$ bodu B' pro vytčenou polohu je rovna rych-