Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Krňan
Methodické poznámky k rovnicím 2. stupně

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 71 (1946), No. Suppl., D75--D81

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122826

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1946

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Sestrojení afinní kružnice k eliptickému řezu nám velmi dobře také poslouží, máme-li sestrojiti ještě vržený stín při rovnoběžném osvětlení spodní seříznuté části na rovinu podstavnou. V tomto případě je též elipsa vrženého stínu e' afinně sdružená s uvažovanou kružnicí.

4. Nakonec všimněme si konstrukce perspektivního obrazu kružnice (v citov. učebnici na str. 161 a dále). Mějme za úlohu zobraziti v perspektivě kružnici ležící v rovině základní a mající střed S (—3; 6; 0) a poloměr $r = 6$ cm; pro perspektivu buď distance $d = 24$ a výška horizontu $v = 7$.

V připojeném obr. 6 je sestrojena perspektiva kružnice známým způsobem.

Pokládám za důležité sestrojiti tečny ${}^1t$, ${}^2t$, které v perspektivním obraze jsou kolmé k ose x a určiti jejich dotykové body ${}^1T^s$ resp. ${}^2T^s$. Tyto tečny jsou zřejmě obrazy obrysových povrchových přímek kolmé válcové plochy, sestrojené nad danou kružnicí.

Obrysové povrchové přímky stanoví tečné roviny, vedené středem promítání k válcové ploše. Stopy těchto tečných rovin na rovině základní jsou tečnami z bodu O_1 ke kružnici k.

Po sklopení roviny základní do průmětny ν přejde kružnice k do (k) a bod O_1 do $(O)_1$, vzdáleného od počátku soustavy souřadnic o distanci d. Ježto tato distance je zpravidla nejméně 24 cm, je $(O)_1$ nepřístupný.

Můžeme však narýsovat opět kružnici l, opsanou nad $\overline{(S)(O)_1}$ jako nad průměrem, která na (k) vytíná dotykové body $({}^1T)$, $({}^2T)$. Její střed Ω má souřadnice $\Omega[\frac{1}{2}x_s; \frac{1}{2}(d - y_s); 0]$, kde $(x_s; y_s)$ jsou souřadnice středu kružnice S a d jest distance. Tečnám v bodech $({}^1T)$ a $({}^2T)$ odpovídají hledané tečny elipsy e^s. Určíme tudíž nejprve dotykové body ${}^1T^s$ a ${}^2T^s$ a v nich pak tečny.

Při sestrojování perspektivních obrazů obrysů válcových ploch je tato konstrukce nutná.

Metodické poznámky k rovniciam 2. stupňa.

Dr Frant. Krňan, Bratislava.

Často sa rovniciam 2. stupňa na strednej škole venuje málo pozornosti. Žiak sa naučí jeden — dva vzorce, niektorý snáď aj vlastnosti koreňov a to mu má postačiť. Keď sa mu vzorec z hlavy vytratí, alebo ho popletie (najmä znamienka), je v koncoch. Každý kolega-matematik vie, akú dôležitosť majú rovnice 2. stupňa jednak v praktických aplikáciach, jednak ako úvod k rovniciam vyšších stupňov. I keď sa na strednej škole nepreberajú, až na malé výnimky, rovnice vyšších stupňov, predsa považujem za veľmi dôležité dať žiakovi nahliadnuť do podstaty veci práve na jednoduchom prípade rovníc 2. stupňa.

Rovnice druhého stupňa začínam vždy touto jednoduchou geometrickou úlohou: Aké sú rozmery obdiaľníka, keď jeho plocha je q a jeho obvod je $2p$. Pravda, prvý príklad počíta žiak s mojou pomocou s číselne danými hodnotami p, q (aby príklad „vyšiel“). Dovolím mu, aby sostavoval sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych. Asi takto:

$$2\,(x + y) = 2p, \tag{1}$$

$$x \,.\, y = q. \tag{2}$$

Doporučím rovnicu (1) krátiť dvomi a zdôrazním, že tu ide o úlohu najsť dve čísla, keď viem ich súčet a ich súčin. Tým je prebudený záujem žiactva. Pokračuje sa dosadzovacou metodou. Z rovnice (1) vyrátame y, vsadíme do rovnice (2) a po úprave dostávame:

$$x^2 - px + q = 0.$$

Mladík chce riešiť ďalej, skúsi jedno — druhé, ale k pozitívnemu výsledku sa zpravidla nedopracuje. Nápadov na ďalší postup býva v triede pravda mnoho. Postupujeme potom tak, že absolútny člen dáme na pravú stranu, doplníme ľavú stranu na štvorec pridaním člena $(\frac{1}{2}p)^2$, a aby rovnica ostala v platnosti, pridáme tento člen aj na druhú stranu. Ako doplňovať dvojčlen na štvorec, treba pravda žiakov naučiť a nacvičiť skôr, napr. pri zdvojmocňovaní dvojčlenov.

Ďalší krok:

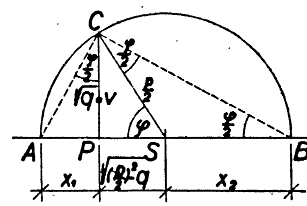
$$(x - \tfrac{1}{2}p)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2 - q.$$

Treba zdôrazniť, že člen $(\frac{1}{2}p)^2$ je vždy kladný. Nasleduje odmocnenie oboch strán rovnice. Ak dvojznačnosť oddvojmocňovania nebola do žiakov vštepená už skôr, nedivme sa, že na plus — minus zabudnú. Dochádzame takto ku koncu „ťažkej úlohy“:

$$(x - \tfrac{1}{2}p)_{1,2} = \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q},$$

$$x_{1,2} = \tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}.$$

Znovu pripomínam, že písmeny p, q v príklade zatiaľ nefigurujú. Počítame čiste numericky. Je to pre žiaka názornejšie. Význam indexov 1, 2 treba žiakom veľmi podrobne vysvetliť. Žiak ľahko pochopí, že druhý koreň je v našom prípade druhá neznáma v pôvodnej sústave. Taktiež chápe, že poradie prvý, druhý nie je dôležité. Doporučujem prepočítať niekoľko numerických príkladov týmto postupom — bez vzorca. Treba ich pritom postupne soznamovať s pojmami: člen kvadratický, člen lineárny, absolútny, súčiniteľ u člena kvadratického, lineárneho. Zvoľme raz príklad tak, aby hľadaný obdiaľnik bol štvorec. Zpočiatku to žiaka zarazí, potom má z toho radosť. A nakoniec najväčšie prekvapenie: voľme p, q tak, aby pravá strana rovnice bola záporná. Oddvojmocňovať nemožno, ak ešte nebola zavedená imaginárna jednotka. Ak už bola zavedená, strany nemajú v tomto prípade konkrétny smysel. Keď sa pýtate žiaka, ako to, že sme nič nevyrátali, máloktorý najde správnu odpoveď. Doporučujem položiť otázku: Ak udám ľubovoľne plochu a obvod obdiaľníka, či jestvuje vždy obdiaľník splňujúci dané podmienky? Tu si žiak uvedomí, že nemôže byť plocha veľká pri malom obvode. Treba mu ale objasniť, že môže byť plocha malá pri veľkom obvode. Aby sme túto okolnosť ozrejmili, pripomenieme mu druhú vetu Euklidovu a načrtneme obrázok 1.



Obr. 1.

Opýtame sa, aká je plocha obdiaľníka, keď jeho strany sú x_1 a x_2. Pochopí, že v^2. Aj to ľahko pochopí, že táto plocha je najväčšia, keď $x_1 = x_2 = r$, keď hľadaný obdiaľník je štvorec. Pochopí potom i to, že ak plocha q má byť väčšia ako r^2, je úloha neriešiteľná.

V ďalšom výklade doporučuje sa pripomenúť žiakom rozklad kvadratických trojčlenov. Dáme na pr. úlohu určiť rozmery obdiaľníka keď jeho polovičný obvod je 24 a plocha 135. Úloha vedie k rovnici:

$$x^2 - 24x + 135 = 0.$$

Žiadajme, aby žiak rozložil kvadratický trojčlen. Uvedomí si pritom, že skutočne má najsť dve čísla, ktorých súčin je 135 a súčet 24. Ak tieto označíme x_1, x_2, pochopí, že práve tieto čísla sú strany hľadaného obdiaľníka.

Prevedieme rozklad:

$$x^2 - 24x + 135 = (x - 15) . (x - 9) = 0.$$

Základný poznatok, že súčin je nula vtedy a len vtedy, ak aspoň jeden činiteľ je nula, treba v žiakoch doslovne vyvolať, pretože ho nemajú v poprední svojho vedomia. Keď tento poznatok strávili, budú mať jasný obraz o vlastnostiach koreňov kvadratickej rovnice.

Z hornej rovnice plynie: $x_1 = 15$, $x_2 = 9$. Treba častejšie zdôrazňovať, že súčet koreňov je v absolútnej hodnote rovný súčiniteľovi lineárneho člena, ale je opačného znamienka ako tento.

Len po tejto príprave možno pristúpiť k odvodeniu vzorca pre riešenie rovnice:

$$x^2 + px + q = 0$$

a to tak, že paralelne počítame aj numerický príklad aj rovnicu s koeficientami p, q. Pritom nutno neustále upozorňovať na znamienka. Keď dospejeme ku vzorcu:

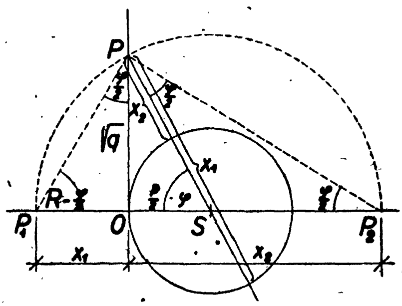
$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}$$

ukážme žiakovi, že tento výsledok vychádza aj z obrázku 1, lebo vzdialenosť $\overline{PS}$ je $\sqrt{(\frac{1}{2}p)^2 - q}$. Vzhľadom k tomu, že p je záporné, je $r = -\frac{1}{2}p$ číslo kladné. Z obrázku tiež vidieť, že v tomto prípade, to zn. pri $q > 0$, je $|\sqrt{(\frac{1}{2}p)^2 - q}| < |\frac{1}{2}p|$, a preto oba korene sú kladné.

Užitím Euklidovej poučky riešime geometricky každú kvadratickú rovnicu s kladným q. Pri zápornom p sú oba korene kladné, pri kladnom oba korene záporné. To musia žiaci strávit.

Euklidovej vety nemožno užiť na riešenie kvadratickej rovnice so záporným q, už aj preto, že $v = \sqrt{q}$ by bolo imaginárne. V tomto prípade je jeden koreň kladný, druhý záporný. Súčet koreňov je rozdiel ich absolútnych hodnôt. Ide o vyhľadanie dvoch čísiel, keď je daný ich súčin a ich rozdiel — brané v absolútnej hodnote. V tomto prípade riešime úlohu geometricky použitím vety o mocnosti bodu ku kružnici.

Sostrojíme kružnicu o priemere $|p|$, k nej sostrojíme dotyčnicu a na ňu nanesieme $\sqrt{-q}$ (viď obr. 2). Bod P spojíme so stredom kružnice S. Na sečnici vzniknú úseky x_1 a x_2.



Obr. 2.

Platí:

$$|x_1| \cdot |x_2| = |q|,$$

$$||x_1| - |x_2|| = |p|.$$

Úseky x_1 a x_2 sú korene kvadratickej rovnice so záporným q. Väčší z nich má opačné znamienko ako p. Pritom

$$\sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q} = \overline{PS} > |\tfrac{1}{2}p|,$$

lebo

$$-q > 0.$$

Korene sú vždy reálne; žiaci vidia názorne, prečo. Pri tomto geometrickom znázornení možno ich cvičiť sledovať závislosť koreňov x_1, x_2 na q pri konštantnom p, alebo naopak. Tomuto spôsobu dávam prednosť pred nomografickým riešením rovníc 2. stupňa ako sa to podáva v našich učebniciach. Žiaci stredných škôl nemajú ešte pre tento druh matematického myslenia dosť vyvinutý smysel. Skôr chápu funkčnú závislosť:

$$y = x^2 + px + q.$$

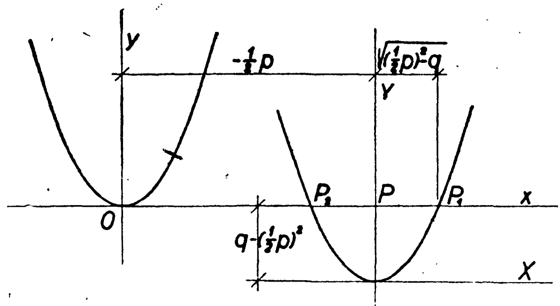
Vedia si k danému x najsť y, sostrojiť funkciou danú krivku a pochopia, že priesečníky tejto krivky s osou x sú korene rovnice:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Pochopia aj význam splývajúcich koreňov a komplexne sdružených koreňov.

Pri súhrnnom opakovaní v oktáve je užitočné previesť so žiakmi rozbor funkcie: $y = x^2 + px + q$ napr. takto:

$$y - q + (\tfrac{1}{2}p)^2 = x^2 + px + (\tfrac{1}{2}p)^2,$$
$$y - [q - (\tfrac{1}{2}p)^2] = (x + \tfrac{1}{2}p)^2.$$



Obr. 3.

Po zavedení:

$$y_0 = q - (\tfrac{1}{2}p)^2,$$
$$x_0 = -\tfrac{1}{2}p$$

dostávame:

$$y - y_0 = (x - x_0)^2,$$

odkiaľ ak:

$$y - y_0 = Y,$$
$$x - x_0 = X,$$

dostávame vzťah:

$$Y = X^2.$$

Tu pochopia žiaci, že všetky funkcie $y = x^2 + px + q$ sú tvarove shodné paraboly s vrcholami o súradniciach:

$$x_0 = -\tfrac{1}{2}p,$$
$$y_0 = q - (\tfrac{1}{2}p)^2 = -D.$$

Upozorníme ich, že y_0 rovná se záporne vzatému diskriminantu, v dôsledku čoho priesečníky krivky s osou x, t. zn. reálne korene, dostaneme len vtedy, keď $y_0 < 0$.

Pritom ako samozrejmosť javí sa tá skutočnosť, že v absolútnej hodnote:

$$\overline{P_1P}^2 = \overline{PV} \text{ (viď obr. 3).}$$

V dôsledku tejto skutočnosti za použitia jedinej krivky: $Y = X^2$, ktorú vkladáme pod priezračný milimetrový papier, na ktorom sú vyznačené kotované osy, možno riešiť graficky všetka rovnice druhého stupňa, len treba krivku vhodne umiestniť. Určiť $x_0 = -\frac{1}{2}p$ vyžaduje minimálnej práce, určiť $y_0 = q - (\frac{1}{2}p)^2$ znamená vyrátať diskriminant. Preto toto grafické riešenie je v podstate len grafickým odmocňovaním diskriminantu. — Nakoľko parabola: $Y = X^2$ má malý parameter, doporučuje sa sostrojiť krivku tak, že úsečky x zväčšíme napr. na dvojnásobky a podľa toho aj os x kotujeme.

Odvodenie vzorca pre riešenie rovnice:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

neprináša ideove nič nového. Pravda, znalosť vzorca nutno vyžadovať.

Goniometrického riešenia rovníc druhého stupňa sa užíva na stredných školách veľmi zriedka. Substitúcia:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{-ac}}{b} \quad \text{pri } ac < 0$$

zdá sa na prvý pohľad umelou. A predsa, má názorný geometrický význam, ak riešime rovnicu graficky použitím vety o mocnosti bodu ku kružnici. Nakoľko: $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{-ac}}{b} = \frac{\sqrt{-q}}{\frac{1}{2}p}.$$

Uhol φ je vyznačený na obr. 2. Zavedením uhlu φ vychádzajú korene rovnice 2. stupňa pre prípad $a > 0$, $c < 0$ vo forme:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varphi.$$

O tom sa ľahko presvedčíme z obr. 2, lebo, ak $\overline{SP} = \overline{SP_1} = \overline{SP_2}$, je $\overline{OP_1} = \overline{PQ_1} = |x_1|$, $\overline{OP_2} = \overline{PQ_2} = |x_2|$, $\sphericalangle OP_2P = \sphericalangle OPP_1 = \frac{1}{2}\varphi$, a preto

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{|x_1|}{\sqrt{-q}}, \quad \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{|x_2|}{\sqrt{-q}},$$

odkiaľ

$$|x_1| = \sqrt{-q} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi, \quad |x_2| = \sqrt{-q} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Väčší z koreňov má opačné znamienko ako p.

V prípade keď: $q > 0$ a $(\frac{1}{2}p)^2 - q > 0$, substitúcia:

$$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{ac}}{b} = \frac{\sqrt{q}}{\frac{1}{2}p}$$

vedie k riešeniu:

$$x_1 = -\sqrt{q} \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$x_2 = -\sqrt{q} \,.\, \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Z obr. 1 je zrejmé, že $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\varphi$, odkiaľ

$$\frac{|x_1|}{\sqrt{q}} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi, \quad \frac{|x_2|}{\sqrt{q}} = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varphi,$$

a tedy vyššie uvedené riešenie vychádza ako samozrejmosť.

Dať imaginárnemu riešeniu názornú interpretáciu ovšem nemožno. V prípade, keď $q > 0$, a $(\frac{1}{2}p)^2 - q < 0$, substitúcia:

$$\cos\varphi = \frac{-b}{2\sqrt{ac}} = \frac{\frac{1}{2}p}{\sqrt{q}}$$

vedie k riešeniu:

$$x_{1,2} = \sqrt{q}\,(\cos\varphi \pm i \sin\varphi).$$

Nakoľko v tomto prípade: $|\sqrt{q}| > |\frac{1}{2}p|$, uhol φ nemá názorného významu.

Aj rovnice 3. stupňa riešia sa veľmi pekne trigonometricky. Neviem ale, či užívané substitúcie možno názorne geometricky interpretovať.

Nakoniec chcem len toľko poznamenať, že aj v najjednoduchších prípadoch možno najsť hodne zaujímavých súvislostí, inak rečeno, každý matematický motív možno pekne vychutnať tým, že ho osvetlíme z rôznych hľadísk a kocháme sa so žiakmi v nádhernej súhre rôznych disciplín matematiky.

Poznámka o běžných chybách žáků v matematice.

Karel Lerl, Louny.

Je velmi známým zjevem, který neujde pozornosti ani nejmladších učitelů, že se žáci dopouštějí v matematice skoro v týchž partiích vždy obdobných chyb. Pravidelnost výskytu chyb je tak příznačná, že učitel je může s velkou pravděpodobností na základě svých předchozích zkušeností očekávati a přímo předpověděti. Byly často činěny pokusy shrnouti tyto chyby, přímo typické, a pátrati po příčinách tohoto zjevu vůbec. Výsledků těchto pokusů