Lucien Godeaux

Sur un procédé de cunstruction de trasformations birationnelles hyperspatiales

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 4, 121--130

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122822`

Sur un procédé de construction de transformations birationnelles hyperspatiales.

Par Lucien Godeaux (Liège).

(Reçu le 20 Mai 1948.)

Nous nous proposons d'exposer, dans cette note, un procédé de construction de transformations birationnelles de l'hyperspace.[1]) Cette construction fait intervenir deux transformations birationnelles entre deux espaces subordonnés et deux polynomes dont les degrés dépendent des ordres des deux transformations précédentes, mais qui sont par ailleurs arbitraires.

Nous considérons quelques cas particuliers, notamment une transformation du troisième ordre qui généralise la transformation de l'espace ordinaire obtenue en partant des surfaces cubiques circonscrites à un tetraèdre. Cette transformation généralisée fait intervenir deux homographies entre deux espaces subordonnés et deux polynomes quelconques du second degré. Elle nous paraît nouvelle.

1. Considérons deux espaces linéaires S_{r+s+1}, S_{r+s+1}' à $r + s + 1$ dimensions et, dans S_{r+s+1}, deux espaces linéaires S_r, S_s ne se rencontrant pas, dans S_{r+s+1}', deux espaces linéaires S_r', S_s' ne se rencontrant pas.

Supposons qu'entre les espaces S_r, S_r', nous ayons une transformation birationnelle

$$\frac{x_0'}{\varphi_0(x_0, x_1, \ldots, x_r)} = \frac{x_1'}{\varphi_1} = \ldots = \frac{x_r'}{\varphi_r} \tag{1}$$

et entre les espaces S_s, S_s' une seconde transformation

$$\frac{y_0'}{\psi_0(y_0, y_1, \ldots, y_s)} = \frac{y_1'}{\psi_1} = \ldots = \frac{y_s'}{\psi_s}, \tag{2}$$

$x_0, x_1, \ldots, x_r$ sont les coordonnées d'un point de S_r, $y_0, y_1, \ldots, y_s$

[1]) Nous avons signalé cette construction dans notre Cours de Géométrie supérieure de l'Université de Liège en 1935.

celles d'un point de S_s et nous pouvons prendre $x_0, x_1, \ldots, x_r, y_0, y_1, \ldots, y_s$ comme coordonnées d'un point de S_{r+s+1}. De même, les x' sont les coordonnés d'un point de S_r', les y' celles d'un point de S_s'; les x', y' seront les coordonées d'un point de S_{r+s+1}'.

Soient $\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_r)$, $\beta(y_0, y_1, \ldots, y_s)$ deux formes algébriques de degrés respectifs λ, μ. Nous nous proposons de déterminer ces formes de manière que les équations

$$\frac{x_0'}{\varphi_0\beta} = \frac{x_1'}{\varphi_1\beta} = \ldots = \frac{x_r'}{\varphi_r\beta} = \frac{y_0'}{\psi_0\alpha} = \frac{y_1'}{\psi_1\alpha} = \ldots = \frac{y_s'}{\psi_s\alpha} \tag{3}$$

représentent une transformation birationnelle entre les espaces S_{r+s+1}, S_{r+s+1}'.

Observons que si m est le degré des polynomes φ et n celui des polynomes ψ, nous devons avoir

$$m + \mu = n + \lambda.$$

Pour résoudre la question, il nous suffira de montrer que l'on peut résoudre les équations (3) par rapport aux x et aux y, ce qui nous permettra de trouver les polynomes α, β convenant à la question.

2. Soient

$$\frac{x_0}{\varphi_0'(x_0', x_1', \ldots, x_r')} = \frac{x_1}{\varphi_1'} = \ldots = \frac{x_r}{\varphi_r'} = \varrho \tag{4}$$

les formules inverses des équations (1). Supposons que les polynomes φ' soient de degré m'.

Nous devons avoir identiquement

$$\varphi_i(\varphi_0', \varphi_1', \ldots, \varphi_r') \equiv x_i' \, \Phi(x_0', x_1', \ldots, x_r'), \quad i = 0, \ldots, r,$$

Φ est un polynome de degré $m \cdot m' - 1$ qui, égalé à zéro, représente l'ensemble des variétés à $r - 1$ dimensions de l'espace S_r', fondamentales pour la transformation (1), comptées chacune un certain nombre de fois.

Soient de même

$$\frac{y_0}{\psi_0'(y_0', y_1', \ldots, y_s')} = \frac{y_1}{\psi_1'} = \ldots = \frac{y_s}{\psi_s'} = \sigma \tag{5}$$

les équations inverses de la transformation (2), où nous supposons que les polynomes ψ' soient de degré n'.

Nous avons identiquement

$$\psi_k(\psi_0', \psi_1', \ldots, \psi_s') \equiv y_k' \, \Psi(y_0', y_1', \ldots, y_s'), \quad k = 0, \ldots, s\ ,$$

où Ψ est un polynome de degré $n \cdot n' - 1$, l'équation $\Psi = 0$ ayant, dans S_s', une signification analogue à celle de $\Phi = 0$ dans S_r'.

Remplaçons, dans les équations (3), $x_0, x_1, \ldots, x_r$ par $\varrho\varphi_0'$, $\varrho\varphi_1', \ldots, \varrho\varphi_r'$ et $y_0, y_1, \ldots, y_s$ par $\sigma\psi_0', \sigma\psi_1', \ldots, \sigma\psi_s'$. Nous obtenons une seule équation

$$\varrho^m \, . \, \sigma^\mu \, . \, \Phi \, . \, \beta(\psi_0', \psi_1', \ldots, \psi_s') = \sigma^n \, . \, \varrho^\lambda \, . \, \Psi \, . \, \alpha(\varphi_0', \varphi_1', \ldots, \varphi_r'). \quad (6)$$

Pour que les équations (3) puissent être résolues par rapport aux x, y, il faut et il suffit que l'on puisse prendre, dans les équations (5), σ en fonction linéaire de ϱ. Pour cela, il faut que l'équation (6) soit du premier degré en ϱ et σ. Deux cas sont possibles:

1°. $\mu = n - 1$, $\lambda = m - 1$;

2°. $\mu = n + 1$, $\lambda = m + 1$.

3. Considérons le premier cas. L'équation (6) s'écrit

$$\varrho\Phi \, \beta(\psi_0', \psi_1', \ldots, \psi_s') = \sigma\Psi \, \alpha(\varphi_0', \varphi_1', \ldots, \varphi_r').$$

Les équations (4) et (5) donnent

$$\frac{x_i}{\varphi_i'\Psi \, \alpha(\varphi_0', \varphi_1', \ldots, \varphi_r')} = \frac{y_k}{\psi_k'\Phi \, \beta(\psi_0', \psi_1', \ldots, \psi_s')}, \quad (i = 0, 1, \ldots, r; \quad k = 0, 1, \ldots, s) \quad (7)$$

qui sont les équations inverses des formules (3).

Dans le second cas, l'équation (6) devient

$$\sigma\Phi \, \beta(\psi_0', \psi_1', \ldots, \psi_s') = \varrho\Psi \, \alpha(\varphi_0', \varphi_1', \ldots, \varphi_r').$$

Les équations (3) et (4) donnent actuellement

$$\frac{x_i}{\varphi_i'\Phi \, \beta(\psi_0', \psi_1', \ldots, \psi_s')} = \frac{y_k}{\psi_k'\Psi \, \alpha(\varphi_0', \varphi_1', \ldots, \varphi_r')}, \quad (i = 0, 1, \ldots, r, \quad k = 0, 1, \ldots, s) \quad (8)$$

formules inverses des équations (3).

Nous trouvons donc deux solutions:

1°. Une transformation birationnelle représentée par les équations (3) et (7). Aux hyperplans de S_{r+s+1}' correspondent dans S_{r+s+1} des hypersurfaces d'ordre $m + n - 1$ et aux hyperplans de S_{r+s+1} correspondent des hypersurfaces d'ordre $m \, . \, m' + n \, . \, n' - 1$.

2°. Une transformation birationnelle représentée par les équations (3) et (8). Aux hyperplans de S_{r+s+1}' correspondent des hypersurfaces d'ordre $m + n + 1$ et aux hyperplans de S_{r+s+1}, des hypersurfaces d'ordre $mm' + nn' + m' + n' - 1$.

4. Appliquons le procédé aux espaces à $r + s + 1 = 3$ dimensions. Nous avons nécessairement $r = s = 1$ et les transformations birationnelles entre les espaces S_r et S_r', S_s et S_s' sont nécessairement des homographies. Nous pouvons choisir les figures de

référence de manière à pouvoir écrire

$$\frac{x_0'}{x_0}=\frac{x_1'}{x_1},\quad \frac{y_0'}{y_0}=\frac{y_1'}{y_1}.$$

Nous avons $m=n=1$ et le premier cas ($\lambda=m-1$, $\mu=$ $=n-1$) conduit à prendre pour α, β des constantes a, b. Cela nous conduit à l'homographie

$$\frac{x_0'}{bx_0}=\frac{x_1'}{bx_1}=\frac{y_0'}{ay_0}=\frac{y_1'}{ay_1};$$

il ne présente pas d'intérêt.

Le second cas ($\lambda=m+1=2$, $\mu=n+1=2$) conduit à prendre des polynomes du second degré α, β. Nous avons la transformation

$$\frac{x_0'}{x_0\beta(y_0,y_1)}=\frac{x_1'}{x_1\beta}=\frac{y_0'}{y_0\,\alpha(x_0,x_1)}=\frac{y_1'}{y_1\alpha}$$

dont l'inverse est

$$\frac{x_0}{x_0'\,\beta(y_0',y_1')}=\frac{x_1}{x_1'\beta}=\frac{y_0}{y_0'\,\alpha(x_0',x_1')}=\frac{y_1}{y_1'\alpha}.$$

On retrouve ainsi la transformation du troisième ordre bien connue, faisant correspondre aux plans de l'espace S_3, par exemple, les surfaces cubiques passant par les arêtes du tetraèdre constitué par les plans

$$\alpha(x_0',x_1')=0,\quad \beta(y_0',y_1')=0.$$

5. Dans l'espace à $r+s+1=4$ dimensions, on peut prendre $r=2$, $s=1$. Nous supposons que la transformation entre les espaces S_2, S_2' est une transformation quadratique

$$\frac{x_0'}{x_1x_2}=\frac{x_1'}{x_2x_0}=\frac{x_2'}{x_0x_1},$$

tandis que la transformation entre les droites S_1, S_1' est l'homographie

$$\frac{y_0'}{y_0}=\frac{y_1'}{y_1}.$$

Nous avons $m=2$, $n=1$. Dans le premier cas nous pouvons prendre $\lambda=m-1=1$, $\mu=n-1=0$. Alors α est un polynome du premier degré et β une constante b. Nous sommes conduits à la transformation

$$\frac{x_0'}{bx_1x_2}=\frac{x_1'}{bx_2x_0}=\frac{x_2'}{bx_0x_1}=\frac{y_0'}{y_0\,\alpha(x_0,x_1,x_2)}=\frac{y_1'}{y_1\alpha},$$

dont l'inverse est

$$\frac{x_0}{x_1'x_2'\,\alpha(x_1'x_2',\,x_2'x_0',\,x_0'x_1')} = \frac{x_1}{x_2'x_0'\alpha} = \frac{x_2}{x_0'x_1'\alpha} =$$

$$= \frac{y_0}{bx_0'x_1'x_2'y_0'} = \frac{y_1}{bx_0'x_1'x_2'y_1'}.$$

On a en effet
$$\Phi(x_0',\,x_1',\,x_2') \equiv x_0'x_1'x_2'.$$

Le second cas: $\lambda = m + 1 = 3$, $\mu = n + 1 = 2$, nous conduit à la transformation

$$\frac{x_0'}{x_1x_2\,\beta(y_0,\,y_1)} = \frac{x_1'}{x_2x_0\beta} = \frac{x_2'}{x_0x_1\beta} = \frac{y_0'}{y_0\,\alpha(x_0,\,x_1,\,x_2)} = \frac{y_1'}{y_1\alpha},$$

où α est du troisième degré et β du second degré. Les formules inverses de cette transformation sont

$$\frac{x_0}{x_0'x_1'^2x_2'^2\,\beta(y_0',\,y_1')} = \frac{x_1}{x_0'^2x_1'x_2'^2\beta} = \frac{x_2}{x_0'^2x_1'^2x_2'\beta} =$$

$$= \frac{y_0}{y_0'\,\alpha(x_1'x_2',\,x_2'x_0',\,x_0'x_1')} = \frac{y_1}{y_1'\alpha}.$$

La transformation directe est du quatrième ordre et l'inverse est du septième ordre.

On pourrait également considérer, au lieu de la transformation quadratique envisagée entre S_2, S_2', les transformations quadratiques particulières

$$\frac{x_0'}{x_1x_2} = \frac{x_1'}{x_2^2} = \frac{x_2'}{x_0x_1},$$

où l'on a $\Phi \equiv x_0'^2 \,.\, x_1'$, ou

$$\frac{x_0'}{x_0x_1} = \frac{x_1'}{x_0^2} = \frac{x_2'}{x_1^2 - x_0x_2},$$

où l'on a $\Phi \equiv x_1'^3$. Cela conduirait également à des transformations nouvelles.

6. Retournons au cas où r et s sont quelconques, mais supposons que les transformations considérées entre S_r et S_r', S_s et S_s' soient des homographies. On peut toujours disposer des figures de référence pour que ces homographies soient représentées par

$$\frac{x_0'}{a_0x_0} = \frac{x_1'}{a_1x_1} = \ldots = \frac{x_r'}{a_rx_r}$$

et

$$\frac{y_0'}{b_0y_0} = \frac{y_1'}{b_1y_1} = \ldots = \frac{y_s'}{b_sy_s},$$

les a et les b étant des constantes.

L'application du premier cas conduit à une homographie entre les espaces S_{r+s+1} et S_{r+s+1}'. Considérons le second cas et soient

$$\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_r), \quad \beta(y_0, y_1, \ldots, y_s)$$

deux polynomes quelconques du second degré.

La transformation obtenue s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{x_0'}{a_0x_0\,\beta(y_0, y_1, \ldots, y_s)} &= \frac{x_1'}{a_1x_1\beta} = \ldots = \frac{x_r'}{a_rx_r\beta} = \\ &= \frac{y_0'}{b_0y_0\,\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_s)} = \frac{y_1'}{b_1y_1\alpha} = \ldots = \frac{y_s'}{b_sy_s\alpha}.\end{aligned} \tag{1}$$

Les formules inverses sont

$$\begin{aligned}\frac{a_0x_0}{x_0'\,\beta'(y_0', y_1', \ldots, y_s')} &= \frac{a_1x_1}{x_1'\beta'} = \ldots = \frac{a_rx_r}{x_r'\beta'} = \\ &= \frac{b_0y_0}{y_0'\,\alpha'(x_0', x_1', \ldots, x_r')} = \frac{b_1y_1}{y_1'\alpha'} = \ldots = \frac{b_sy_s}{y_s'\alpha'}\end{aligned} \tag{2}$$

où, pour abréger l'écriture, nous posons

$$\beta'(y_0', y_1', \ldots, y_s') \equiv \beta\left(\frac{y_0'}{b_0}, \frac{y_1'}{b_1}, \ldots, \frac{y_s'}{b_s}\right),$$

$$\alpha'(x_0', x_1', \ldots, x_r') \equiv \alpha\left(\frac{x_0'}{a_0}, \frac{x_1'}{a_1}, \ldots, \frac{x_r'}{a_r}\right).$$

Le système homaloïdal dans l'espace S_{r+s+1} a pour équation

$$\begin{aligned}&(\lambda_0a_0x_0 + \lambda_1a_1x_1 + \ldots + \lambda_ra_rx_r)\,\beta(y_0, y_1, \ldots, y_s) + \\ &+ (\mu_0b_0y_0 + \mu_1b_1y_1 + \ldots + \mu_sb_sy_s)\,\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Sa base est constituée par les points communs aux hypersurfaces

$$\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0, \quad \beta(y_0, y_1, \ldots, y_s) = 0, \tag{4}$$

par les points de l'espace linéaire S_s

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_r = 0$$

et par les points de l'espace linéaire S_r

$$y_0 = y_1 = \ldots = y_s = 0.$$

La première équation (4) représente un cône du second ordre ayant pour sommet l'espace S_s; nous le désignerons par M. La seconde équation représente un cône du second ordre ayant pour sommet l'espace S_r; il sera désigné par N. Ces deux cônes ont en commun une variété du quatrième ordre à $r + s - 1$ dimensions, que nous désignerons (M, N).

De plus, l'hyperquadrique de S_r,

$$\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0, \ y_0 = y_1 = \ldots = y_s = 0$$

et l'hyperquadrique de S_s,

$$\beta(y_0, y_1, \ldots, y_s) = 0, \ x_0 = x_1 = \ldots = x_r = 0$$

sont doubles pour les hypersurfaces (3).

Considérons un point (x, y) de la variété (M, N). Les hyperplans tangents en ce point aux hypersurfaces M, N ont pour équations

$$A \equiv \sum_{i=0}^{r} X_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = 0, \ B \equiv \sum_{i=0}^{s} Y_i \frac{\partial \beta}{\partial y_i} = 0.$$

Considérons maintenant les hypersurfaces (3) tangentes au point (x, y) à l'hyperplan

$$A + hB = 0.$$

L'hyperplan tangent au point (x, y) à l'hypersurface (3) a pour équation

$$A \sum_{k=0}^{s} \mu_k b_k y_k + B \sum_{k=0}^{r} \lambda_k a_k x_k = 0;$$

on doit donc avoir

$$h \sum_{k=0}^{s} \mu_k b_k y_k - \sum_{k=0}^{r} \lambda_k a_k x_k = 0.$$

On en conclut que, dans l'espace S_{r+s+1}', aux hypersurfaces considérées correspondent les hyperplans passant par le point

$$-a_0 x_0, -a_1 x_1, \ldots, -a_r x_r, hb_0 y_0, hb_1 y_1, \ldots, hb_s y_s. \tag{5}$$

Ce point appartient à la varété (M', N') d'équations

$$\alpha'(x_0', x_1', \ldots, x_r') = 0, \ \beta'(y_0', y_1', \ldots, y_s') = 0.$$

Lorsque h varie, le point (5) décrit la droite

$$\frac{x_0'}{a_0 x_0} = \frac{x_1'}{a_1 x_1} = \ldots = \frac{x_r'}{a_r x_r}, \ \frac{y_0'}{b_0 y_0} = \frac{y_1'}{b_1 y_1} = \ldots = \frac{y_s'}{b_s y_s}.$$

Lorsque le point (x, y) décrit la variété (M, N), le point x', y' décrit la variété (M', N'). Ces deux variétés sont donc homologues dans la transformation.

Soit $P(x_0, x_1, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots, 0)$ un point de S_r qui n'est pas situé sur $\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0$.

L'hyperplan tangent au point P à l'hypersurface (3) a pour équation

$$\sum_{k=0}^{s} \mu_k b_k Y_k = 0. \tag{6}$$

Cette équation ne dépend pas des coordonnées (x). Considérons maintenant les hypersurfaces (3) tangentes à l'hyperplan (6). Leurs homologues, dans l'espace S_{r+s+1}', sont les hyperplans passant par le point

$$(0, 0, \ldots, 0, \mu_0 b_0, \mu_1 b_1, \ldots, \mu_s b_s). \tag{7}$$

Lorsque $\mu_0, \ldots, \mu_s$ varient, le point (7) décrit l'espace S_s', l'homologue du point P. Lorsque le point P décrit l'espace S_r en dehors de α son homologue reste fixe. Les deux espaces S_r et S_s' et de même les deux espaces S_s et S_r' sont donc homologues dans la transformation.

Soit maintenant $P(x_0, x_1, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots, 0)$ un point de

$$\alpha = 0, \ y_0 = y_1 = \ldots = y_s = 0.$$

Ce point est double pour les hypersurfaces (3) et le cône tangent en ce point a pour équation

$$\beta(Y_0, Y_1, \ldots, Y_s)\sum_{i=0}^{r}\lambda_i a_i x_i + \sum_{i=0}^{r} X_i \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} \cdot \sum_{k=0}^{s}\mu_k b_k Y_k = 0. \tag{8}$$

Considérons les hypersurfaces (3) tangentes en P à une droite passant par un point (X, Y) déterminé, appartenant au cône précédent. A ces hypersurfaces correspondent les hyperplans de S_{r+s+1}' passant par le point

$$a_0 x_0 \beta(Y), \ a_1 x_1 \beta, \ldots, a_r x_r \beta, \ b_0 Y_0 \sum_{i=0}^{r} X_i \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}, \ldots, b_s Y_s \sum_{i=0}^{r} X_i \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}.$$

Lorsque le point (X, Y) varie sur le cône (8), ce point décrit l'espace

$$\frac{x_0'}{a_0 x_0} = \frac{x_1'}{a_1 x_1} = \ldots = \frac{x_r'}{a_r x_r}$$

à $s + 1$ dimensions, passant par S_s. Lorsque le point P varie sur l'hyperquadrique

$$\alpha = 0, \ y_0 = y_1 = \ldots = y_s = 0 \tag{9}$$

cet espace décrit la variété M' d'équation

$$\alpha'(x_0', x_1', \ldots, x_r') = 0.$$

Aux points infiniment voisins de l'hyperquadrique (9) correspondent donc les points du cône M'.

De même, aux points infiniment voisins de l'hyperquadrique

$$\beta = 0, \ x_0 = x_1 = \ldots = x_r = 0$$

correspondent les points du cône N', d'équation

$$\beta'(y_0', y_1', \ldots, y_s') = 0.$$

On en conclut qu'à une droite de S_{r+s+1} (ou de S_{r+s+1}') correspond dans l'autre espace une cubique gauche s'appuyant en deux points sur chacune des hyperquadriques α' de S_r', β' de S_s' (ou α de S_r, β de S_s).

7. Terminons par une remarque.

Si les espaces S_r et S_r', S_s et S_s' et par conséquent S_{r+s+1} et S_{r+s+1}' sont superposés, la transformation étudiée ici peut être périodique. Supposons que les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_r$ soient des racines d'ordre premier p de l'unité, dont l'une au moins est primitive et que les nombres $b_0, b_1, \ldots, b_s$ soient de même des racines d'ordre premier q de l'unité, dont l'une au moins soit primitive.

De plus, il faut choisir convenablement des polynomes α et β. Si, par exemple, $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots$ sont différents de l'unité, nous pouvons prendre pour α un polynome du second degré qui est homogène en $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$ et pour β un polynome du second degré qui est homogène en $y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots$. Dans ces conditions, la transformation a la période $2pq$, si p et q sont distincts, la période $2p$, si $p = q$.

Ainsi par exemple, si ε est une racine cubique primitive de l'unité, la transformation

$$\frac{x_0'}{x_0\,\beta(y_0, y_1)} = \frac{x_1'}{\varepsilon x_1 \beta} = \frac{y_0'}{y_0\,\alpha(x_0, x_1)} = \frac{y_1'}{\varepsilon y_1 \alpha}$$

a la période six, si nous posons $\alpha \equiv a_0 x_0^2$, ou $a_1 x_0 x_1$, ou $a_2 x_1^2$ et $\beta = b_0 y_0^2$, ou $b_1 y_0 y_1$, ou $b_2 y_1^2$.

Prague, le 17 mai 1948.

*

O jednom způsobu konstrukce biracionálních transformací ve vícerozměrných prostorech.

(Obsah předešlého článku.)

Jsou dány dva lineární prostory S_{r+s+1} a S_{r+s+1}', v prvním pak dva lineární prostory S_r, S_s, které se neprotínají, ve druhém dva prostory S_r', S_s', které se neprotínají. Mezi S_r a S_r' existuje biracionální transformace stupně m v jednom směru a m' v druhém směru, daná rovnicemi (1) a (4), mezi S_s a S_s' pak biracionální transformace stupně n v jednom a n' v druhém směru, daná rovnicemi (2) a (5) (odst. 1, 2). Vezmeme-li $x_0, x_1, \ldots, x_r, y_0, \ldots, y_s$ za souřadnice v S_{r+s+1} (a obdobné v S_{r+s+1}'), lze najít dvě formy

$$\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_r),\ \beta(y_0, y_1, \ldots, y_s)$$

jejichž stupně jsou resp. λ, μ, takové, že rovnice (3) představují biracionální transformaci mezi S_{r+s+1} a S_{r+s+1}'. Ukazuje se, že jsou dvě řešení, při čemž tvar forem α, β nehraje žádnou roli, jen jejich stupeň:

$$1.\ \mu = n - 1,\ \lambda = m - 1;$$
$$2.\ \mu = n + 1,\ \lambda = m + 1.$$

Jsou-li Φ a Ψ formy definované identitami

$$\varphi_i(\varphi_0', \varphi_1', \ldots, \varphi_r') \equiv x_i'\Phi(x_0', x_1', \ldots, x_r'),\ i = 0, \ldots, r,$$
$$\psi_k(\psi_0', \psi_1', \ldots, \psi_s') \equiv y_k\Psi(y_0', y_1', \ldots, y_s'),\ k = 0, \ldots, s,$$

jest v prvním případě transformace obrácená k (3) dána rovnicemi (7), ve druhém rovnicemi (8). První transformace jest v jednom směru stupně $m + n - 1$, ve druhém $mm' - nn' - 1$, druhá pak v jednom směru stupně $m + n + 1$, ve druhém stupně $mm' + nn' + m' + n' - 1$. V dalším jsou uvedeny některé aplikace této konstrukce zejména v prostoru o třech a čtyřech rozměrech a pak v případě, že obě originální transformace jsou kolineace. V tomto posledním případě vede druhý způsob konstrukce k oboustranně kubické transformaci, která je rozšířením na vyšší prostory známé kubické transformace v obyčejném prostoru, nazývané „tetraedrická“. V posledním odstavci jest pak zjištěna možnost periodicity této transformace, jsou-li prostory soumístné.