Jan Vyšín

Poznámka k určení os rovinného řezu na kvadratické kuželové ploše

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 73 (1948), No. 4, D56--D57

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122819

Sečtením

$$I_0 = I_2 + I_3 = \frac{1}{a^3} \frac{E}{k'^2}.$$

Užijeme-li výsledku z α) nebo γ), jest tím naopak výraz pro $\frac{1}{k} \frac{\partial K}{\partial k}$ dokázán.

Objem shora uvedeného tělesa je tedy $V = \frac{8}{3} b^3 \frac{E}{k'^2} = \frac{8}{3} a^3 k' E$.

Pro $b = a$ přejde těleso v kouli; $k = 0$, $k' = 1$, $E = \frac{1}{2}\pi$, $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.
Pro $b = 0$ těleso se zploští v kruh, $k = 1$, $k' = 0$ a objem je nulový.

Poznámka k určení os rovinného řezu na kvadratické kuželové ploše.

Jan Vyšín, Praha.

Osy kuželosečky, která je průsekem roviny s kvadratickou kuželovou plochou, lze snadno určiti z jejich souvislosti s rovinami kruhových řezů. Platí totiž věta:

Jednoduchá kuželosečka k budiž průsekem kvadratické kuželové plochy S s rovinou ϱ. Pak roviny kružnic na ploše S protínají rovinu ϱ ve dvou osnovách přímek souměrně sdružených podle každé osy kuželosečky k.

Vyslovenou větu dokážeme jednoduše analyticky. Osy soustavy pravoúhlých souřadnic položíme do os kuželové plochy S: její rovnice pak bude

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = 0. \tag{1}$$

Předpokládáme-li, že plocha S je reálná, je aspoň jeden z koeficientů a, b záporný. Označení os souřadnic zvolme tak, aby roviny reálných kruhových řezů byly kolmé k rovině $x = 0$. Směr těchto rovin kruhových řezů určíme vrcholovými rovinami μ, ν, které náležejí do svazku kuželové plochy S a isotropické kuželové plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0. \tag{2}$$

Rovnice rovin μ, ν vyjde odečtením rovnic (1), (2), t. j.

$$(1 - a) y^2 + (1 - b) z^2 = 0. \tag{3}$$

S ohledem na reálnost dostaneme pro koeficienty omezení $a > 1$, $b < 0$ nebo $a < 0$, $b > 1$.

Rovinu ϱ vyjádříme parametricky

$$x = \alpha_1 u + \alpha_2(v - 1),^{*})$$
$$y = \beta_1 u + \beta_2(v - 1), \qquad (4)$$
$$z = \gamma v.$$

Dosadíme-li z rovnic (4) do (1), obdržíme rovnici kuželosečky k v rovnoběžkových souřadnicích u, v. Nevlastní body kuželosečky k nám dávají kvadratické členy této rovnice, t. j.

$$(\alpha_1^2 + a\beta_1^2)\,u^2 + (2\alpha_1\alpha_2 + 2a\beta_1\beta_2)\,uv + (\alpha_2^2 + a\beta_2^2 + b\gamma^2)\,v^2 = 0. \qquad (5)$$

Dosazením z rovnic (4) do (3) dostaneme podobně nevlastní body průsečnic $\varrho\,.\,\mu$, $\varrho\,.\,\nu$

$$(1 - a)\,\beta_1^2 u^2 + 2\,(1 - a)\,\beta_1\beta_2 uv + \\ + [(1 - a)\,\beta_2^2 + (1 - b)\,\gamma^2]\,.\,v^2 = 0. \qquad (6)$$

Involuce daná dvojicemi (5), (6) obsahuje též dvojici

$$(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\,u^2 + 2\,(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\,uv + (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma^2)\,v^2 = 0, \qquad (7)$$

která vyjde sečtením rovnic (5), (6). K dvojici (7) však dojdeme právě takovým postupem jako k dvojici (5), vyjdeme-li od rovnice plochy (2) místo od rovnice plochy (1). To znamená, že dvojice (7) jsou kruhové body roviny ϱ. Samodružné prvky involuce (5), (7) jsou tedy směry kolmé a konjugované vzhledem ke kuželosečce k: jsou to směry os kuželosečky k, a protože oddělují harmonicky dvojici (6), je tím vyslovené tvrzení dokázáno.

Sestrojme tedy na př. čtyři tečné roviny kuželové plochy S rovnoběžné s průsečnicemi $\varrho\,.\,\mu$, $\varrho\,.\,\nu$. Ty protnou rovinu ϱ v případě středové kuželosečky k ve dvou dvojicích rovnoběžných tečen, které tvoří tečnový kosočtverec (s vrcholy na osách). Splynou-li oba nevlastní body (6), dávají jeden samodružný bod involuce, t. j. směr jedné osy. To nastane, je-li rovina ϱ rovnoběžná s průsečnicí $\mu\,.\,\nu$, čili též s osou x.

V případě paraboly je (5) úplný čtverec. S každou z průsečnic $\mu\,.\,\varrho$, $\nu\,.\,\varrho$ lze vést jen jednu rovnoběžnou tečnu: obě tyto tečny jsou souměrně položeny podle osy. Je ovšem možné, že též (6) je úplný čtverec: pak obě tyto tečny splynou ve vrcholovou tečnu.

---

*) u, v jsou rovnoběžkové souřadnice v rovině ϱ, osa u je průsečnicí roviny ϱ s rovinou $z = 0$, osa v protíná osu z (v bodě $v = 1$).