

Zdeněk Pírko

Základní rovnice pro pohyb proměnného rovinného útvaru a její použití v
teorii rovinných křivek

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 4, D83--D86

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122807>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1947

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

(e). Je-li $m^2 + n^2 = r^2 = \varrho^2$, degeneruje zobecněná Bernoulliho kvartika ve dvojnásobně branou rovnoběžku s osou x o rovnici $(y - n)^2 = 0$ a elipsu

$$\frac{(x - m)^2}{r^2} + \frac{(y - n)^2}{4r^2} = 1. \quad (4,9)$$

Základní rovnice pro pohyb proměnného rovinného útvaru a její použití v theorii rovinných křivek.

Zdeněk Pírko, Praha.

V pojednání „Pohyb proměnného rovinného útvaru“^{*}, otištěném v tomto časopise, odvodil jsem jisté velmi obecné rovnice (nazval jsem je „zobecněné rovnice Cesàrovy“) a ukázal, že vhodnou jejich specialisací lze dospět k rovnicím, které v podstatě nejsou nic jiného než „základní rovnice Mannheimovy — d'Ocagneovy“, z nichž vychází kinematická geometrie při studiu vlastností proměnného rovinného útvaru. Methoda, kterou jsem dospěl k zobecněným rovnicím Cesàrovým a odtud k základní rovnici pro pohyb proměnného rovinného útvaru, byla metoda pohyblivé soustavy souřadnic.

V tomto článku podávám jiné (dva) elementární důkazy této základní rovnice a to methodou klasické diferenciální geometrie a zároveň ukazují na jinou možnost jejího použití, totiž v theorii rovinných křivek.

1. Budiž dána rovinná křivka Γ s obloukem σ a s parametrickými rovnicemi

$$\xi = \xi(\sigma), \quad \eta = \eta(\sigma), \quad (1)$$

kdež $\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$ jsou jednoznačné funkce parametru σ v jistém společném oboru, které mají první a druhou derivaci. Je-li τ úhel, který svírá kladná tečna této křivky s kladnou osou úseček soustavy, k níž je křivka Γ rovnicemi (1) vztažena, tu platí nejprve $\xi' = \cos \tau$, $\eta' = \sin \tau$ čili $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$ (jestliže jsme akcenty označili derivace podle oblouku σ) a tedy

$$\xi' \xi'' + \eta' \eta'' = 0. \quad (2_1)$$

Dále ze vztahu $\operatorname{tg} \tau = \eta' : \xi'$ plyne

$$\xi' \eta'' - \eta' \xi'' = \tau'. \quad (2_2)$$

Z obou rovnic obdržíme

$$\xi'' = -\eta' \tau', \quad \eta'' = \xi' \tau'. \quad (3)$$

^{*}) Časopis pro pěst. mat. a fys., 71 (1946), 71—77.

Obeecnému bodu (σ) křivky Γ přiřadíme nyní bod $(x; y)$ takto: na tečnu křivky Γ v bodě (σ) nanese od bodu dotyku v kladném smyslu jejím délku $l = l(\sigma)$, kdež $l(\sigma)$ je daná jednoznačná funkce proměnné σ v jistém oboru, v němž jsou jednoznačné i funkce $\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$, která má první derivaci. Krajní bod takto sestrojené úsečky (jiný než bod dotyku $(\xi; \eta)$) mějž souřadnice $(x; y)$. Nabývá-li parametr σ všech svých hodnot na křivce Γ , vytvoří body $(x; y)$ křivku C , jejíž parametrické rovnice jsou

$$x = \xi + l\xi', \quad y = \eta + l\eta', \quad (4)$$

parametrem na křivce C je nyní ovšem oblouk na křivce Γ .

Z rovnic (4) vypočteme

$$x' = (1 + l') \xi' + l\xi'', \quad y' = (1 + l') \eta' + l\eta'', \quad (5)$$

takže platí nejprve

$$y'\xi' - x'\eta' = (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')l$$

a tedy, vzhledem k rovnici (2₂),

$$y'\xi' - x'\eta' = l\tau'. \quad (6)$$

Z rovnic (5) vypočteme ještě

$$x'\eta'' - y'\xi'' = (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')(1 + l');$$

i platí opět vzhledem k rovnici (2₂)

$$x'\eta'' - y'\xi'' = (1 + l')\tau'.$$

Zjednodušíme ještě levou stranu této rovnice na základě vztahů (3), vylučme dále případ, že by čára Γ byla přímkou a vylučme ony body křivky Γ , v nichž má nulovou křivost; obdržíme posléze

$$x'\xi' + y'\eta' = 1 + l'. \quad (7)$$

Definujeme jako kladný smysl na křivce C smysl, v němž roste její oblouk s . Označíme-li pak t úhel, který svírá kladná tečna křivky C s kladnou osou úseček soustavy, k níž je křivka C rovnicemi (4) vztahena, pak pro úhel ν , který svírají odpovídající si tečny křivek Γ , C platí

$$\nu = t - \tau$$

čili

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} \tau}{1 + \operatorname{tg} t \operatorname{tg} \tau} = \frac{(y' : x') - (\eta' : \xi')}{1 + (y' : x')(\eta' : \xi')} = \frac{y'\xi' - x'\eta'}{x'\xi' + y'\eta'}. \quad (8_1)$$

Použijeme-li tedy rovnic (6), (7), nalezneme pro úhel ν výraz, který není závislý na soustavě souřadnic, totiž:

$$\nu = \operatorname{arctg} \frac{l\tau'}{1 + l'}. \quad (9)$$

Vypočteme nyní (za předpokladu, že $1 + l' \neq 0$)

$$\sin \nu = \frac{\operatorname{tg} \nu}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \nu}} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + (1 + l')^2 \tau'^{-2}}}.$$

Použijeme-li znovu rovnic (6), (7), nalezneme nejprve

$$\begin{aligned} l^2 + (1 + l')^2 \tau'^{-2} &= [(y' \xi' - x' \eta')^2 + (x' \xi' + y' \eta')^2] \tau'^{-2} = \\ &= (x'^2 + y'^2) (\xi'^2 + \eta'^2) = s'^2 \tau'^{-2} = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2. \end{aligned}$$

Obdrželi jsme tedy tento výraz pro element oblouku křivky C , nezávislý na soustavě souřadnic:

$$ds = \frac{l d\tau}{\sin \nu}. \quad (10)$$

Jiný způsob, jímž můžeme odvodit vztah (9), je tento: Označíme-li κ křivost křivky Γ v bodě (σ) , platí nejprve známý vztah

$$\kappa = \left| \frac{\xi' \eta''}{\xi'' \eta'} \right|; \quad (11)$$

pro křivku C platí parametrické rovnice (4) a z nich vyplývající rovnice (5); pro úhel ν pak platí vztah (8₁)

$$\operatorname{tg} \nu = \left| \frac{\xi' \eta'}{x' y'} \right| : (x' \xi' + y' \eta'). \quad (8_2)$$

Používající rovnic (5), můžeme psát rovnici (8₂) také ve tvaru

$$\operatorname{tg} \nu = \left| \frac{\xi' + l \xi''}{\xi' + l \xi''} \frac{\eta' + l \eta''}{\eta' + l \eta''} \right| : [(\xi' + l \xi'') \xi' + (\eta' + l \eta'') \eta'].$$

Snadnou úpravou však nalezneme

$$\operatorname{tg} \nu = \left| \frac{\xi' \eta''}{\xi'' \eta'} \right| l : (1 + l')$$

a tedy podle (11)

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\kappa l}{1 + l'},$$

což je rovnice (9).

2. Rovnice (9) a její důsledek, rovnice (10), byly v práci, o níž se zmiňuji v úvodu, východiskem k odvození základních rovnic Mannheimových — d'Ocagneových v kinematické geometrii proměnného rovinného útvaru. Ukažme zde na možnost jiného použití rovnice (9)! Žádáme-li, aby úhel ν byl stálý, je nutno a stačí volit funkci $l(\sigma)$ tak, aby vyhovovala lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$l' - \kappa l \cotg \nu + 1 = 0 \quad (\nu = \text{konst.}).$$

Bude tedy

$$l = \exp(\cotg \nu \int \kappa d\sigma) [C - \int \exp(-\cotg \nu \int \kappa d\sigma) d\sigma] \\ (C \text{ integrační konstanta})$$

a z rovnic (4) obdržíme

$$\begin{aligned} x &= \xi + \exp(\cotg \nu \int \kappa d\sigma) [C - \int \exp(-\cotg \nu \int \kappa d\sigma) d\sigma] \xi' \\ y &= \eta + \exp(\cotg \nu \int \kappa d\sigma) [C - \int \exp(-\cotg \nu \int \kappa d\sigma) d\sigma] \eta' \end{aligned} \quad (12_1)$$

Budiž nyní $\kappa = \kappa(\sigma)$ přirozená rovnice křivky Γ . Pak rovnice (12₁) vyjadřují parametricky (parametrem je oblouk σ) všechny trajektorie, které protínají tečny křivky Γ pod stálým úhlem ν , vyjadřují tudíž *isogonální trajektorie tečen křivky Γ* . Tuto okolnost je však možno vyjádřit ještě jinak. Tečna křivky Γ svírá s normálou křivky C stálý úhel $\frac{1}{2}\pi - \nu$, jinými slovy: křivka Γ je obálkou přímk, které svírají s normálami křivky C stálý úhel čili křivka Γ je *evolutoidou* křivky C . Považujeme-li nyní křivku Γ za křivku základní, jak jsme to dosud činili, je křivka C *inversní evolutoidou* čili *evolventoidou* křivky Γ ; (12₁) jsou parametrické rovnice všech těchto evolventoid.

Ve zvláštním případě, když křivkou Γ je kružnice

$$\xi = a \cos \frac{\sigma}{a}, \quad \eta = a \sin \frac{\sigma}{a}, \quad \text{t. j. } \kappa = \frac{1}{a}, \quad (13)$$

obdržíme z rovnic (12₁)

$$\begin{aligned} x &= a \cos \frac{\sigma}{a} - \left[a \operatorname{tg} \nu + C \exp \left(\frac{\sigma}{a} \cotg \nu \right) \right] \sin \frac{\sigma}{a} \\ y &= a \sin \frac{\sigma}{a} + \left[a \operatorname{tg} \nu + C \exp \left(\frac{\sigma}{a} \cotg \nu \right) \right] \cos \frac{\sigma}{a} \end{aligned} \quad (14)$$

jakožto parametrické vyjádření všech evolventoid kružnice (13).

Poznamenejme ještě, že rovnice (14) ztrácejí platnost v případě trajektorií ortogonálních, t. j. pro $\nu = \frac{1}{2}\pi$. V tomto případě je podle (9)

$$l + l' = 0 \quad \text{čili} \quad l = C - \sigma$$

(C integrační konstanta)

a rovnice (12₁) se redukují na

$$\begin{aligned} x &= \xi + (C - \sigma) \xi' \\ y &= \eta + (C - \sigma) \eta' \end{aligned} \quad (12_2)$$

Tak zase pro kružnici (13) a $\nu = \frac{1}{2}\pi$ nalezneme

$$\begin{aligned} x &= a \cos \frac{\sigma}{a} - (C - \sigma) \sin \frac{\sigma}{a} \\ y &= a \sin \frac{\sigma}{a} + (C - \sigma) \cos \frac{\sigma}{a} \end{aligned}$$

Žádáme-li, aby pro $\sigma = 0$ bylo $x = a$, $y = 0$, bude i $C = 0$ a za těchto podmínek obdržíme z předcházejících rovnic (s novým parametrem $\omega = \frac{\sigma}{a}$)

$$\begin{aligned} x &= a (\cos \omega + \omega \sin \omega) \\ y &= a (\sin \omega - \omega \cos \omega) \end{aligned}$$

parametrické rovnice evolventy kružnice, jak jsme mohli očekávat.