Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Zdeněk Pachta

Vrchol základním bodem svazku kuželoseček

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 4, D74--D78

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122801

resp. $r' = r(a^2 + b^2) : |(a^2 - b\ )|$, kde r je poloměr kružnice l, $a, b \neq a$ jsou poloosy dané elipsy resp. hyperboly. Sestrojená kružnice a kuželosečka se protínají v bodech S', k nimž užitím transformace $\{l, U\}$ sestrojíme body S, které jsou středy hledaných kuželoseček.

Vrchol základním bodem svazku kuželoseček.

Zdeněk Pachta, Pelhřimov.

Množství všech kuželoseček, jež mají čtyři (různé či splývající) body společné, nazýváme svazkem. Uvedené body jsou základní body svazku.

Chceme-li ve svazku určit konečný počet kuželoseček s určitými vlastnostmi, volíme si příslušnou (pátou) podmínku. Učiňme tak a vytkněme pro kuželosečky, náležející svazku o základních bodech A_i ($i = 1, 2, 3, 4$), podmínku vyjádřenou takto:

Úloha 1.: *Sestrojit kuželosečku ve svazku o základních bodech* A_i, ($i = 1, 2, 3, 4$,) *tak, aby bod* A_1 *byl jejím vrcholem.*

Poznámka: 1. O základních bodech svazku učiňme následující předpoklad: alespoň dva ze základních bodů jsou reálné a v jednom z těchto bodů je vrchol.

2. O speciálních případech, kdy dva body nahradíme tečnou s bodem dotyku, je učiněna poznámka dále, kromě případu tečny ve vrcholu, který je řešitelný elementárním způsobem, odlišným od řešení dále uvedeného.

Chceme-li řešit úlohu č. 1. čistě konstruktivně, pak užijeme těchto triviálních pouček:

1. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby bod byl vrcholem středové kuželosečky, jest: normála kuželosečky v tomto bodě prochází jejím středem.*

2. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby bod byl vrcholem paraboly, jest: normála v tomto bodě je osou paraboly.*

Na těchto poučkách založíme postup našeho řešení. Určíme si: I. *Geometrické místo středů* všech kuželoseček svazku; II. *Vztah normál v bodě* A_1 všech kuželoseček svazku vzhledem k jisté hvězdici jejich *průměrů*.

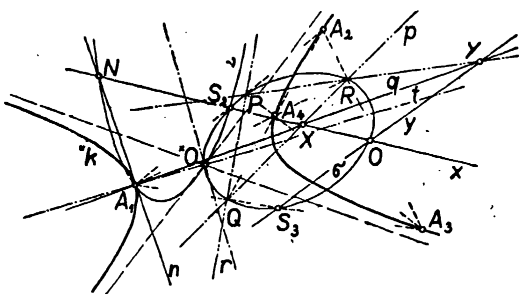
Poznámka: 1. Libovolnou normálou v bodě A_1 je stanovena určitá kuželosečka jednoznačně a tím též její střed, který obecně neleží na zvolené normále. Přesné znění podmínky II., která je zde formulována spíše názorově, vysvítá dále z odvození vztahu (5).

2. Většina vět při důkazech dále uvedených jsou základní poučky projektivní geometrie a základní vlastnosti kuželoseček, proto jsou použity bez důkazů.

3. Symbolika a terminologie je užita podle knihy: Dr. V. Hlavatý: Projektivní geometrie I., Praha 1944, až na označení bodů a přímek.

Poučka. *Geometrickým místem středů kuželoseček svazku je kuželosečka zvaná středová.*

Důkaz: Použijeme poněkud odlišného způsobu, než bývá uváděn v knihách, protože tím zkrátíme postup odvození vztahu (5). Základní body svazku kuželoseček jsou A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Vrcholy společného polárního trojúhelníka kuželoseček svazku označíme P, Q, R a příslušné poláry p, q, r. Středy úseček $\overline{A_1 A_j}$ označíme S_j $(j = 2, 3, 4)$. (Viz obrázek.)



Rovinná hvězdice A_1 $(t_0, t_1, \ldots)$ určuje každou svou přímkou jako tečnou jednoznačně určitou kuželosečku k_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ svazku. Bod $X_r \equiv \overline{t_r p}$ je pólem přímky $\overline{A_1 A_2}$ vzhledem k příslušné kuželosečce k_r a proto $\overline{X_r S_2} \equiv x_r$ prochází středem O_r kuželosečky k_r. Podobné vztahyplatí pro bod $Y_r \equiv \overline{t_r q}$ a pro $\overline{Y_r S_3} \equiv y_r$. Mezi rovinnými hvězdicemi platí vztahy:

$$A_1 (t_0, t_1, \ldots) :: S_2 (x_0, x_1, \ldots), \tag{1}$$

$$A_1 (t_0, t_1, \ldots) :: S_3 (y_0, y_1, \ldots) \tag{2}$$

a proto:

$$S_2 (x_0, x_1, \ldots) ::: S_3 (y_0, y_1, \ldots), \tag{3}$$

z čehož plyne, že středy O_r kuželoseček svazku jsou na kuželosečce, označené σ, vytvořené průsečíky odpovídajících si přímek hvězdic uvedených ve vztahu (3).

Pro hvězdici normál A_1 $(n_0, n_1, \ldots)$ kuželoseček k_r, určených příslušnými tečnami t_r, $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ platí vztahy:

$$A_1 (n_0, n_1, \ldots) ::: A_1 (t_0, t_1, \ldots) \tag{4}$$

a použitím vztahu (1) dostáváme:

$$A_1 (n_0, n_1, \ldots) ::: S_2 (x_0, x_1, \ldots), \tag{5}$$

což značí, že průsečíky $N_r \equiv \overline{n_r x_r}$ přímek uvedených hvězdic, odpovídajících si ve vztahu (5), vytvářejí kuželosečku (různou od σ) označenou ν. Vlastnost této kuželosečky ν je: každý její bod je průsečíkem normály n_r (kuželosečky k_r) s určitým průměrem x_r z hvězdice S_2 $(x_0, x_1, \ldots)$, kde ovšem průměr x_r přísluší téže kuželosečce svazku.

Vlastní řešení uvedeme pouze stručně. Je zřejmé, že společné průsečíky kuželoseček σ a ν, ovšem kromě náhodného bodu S_2, jsou středy hledaných kuželoseček, vázaných podmínkou vpředu stanovenou.

Bod S_2 vyhovuje úloze jedině tehdy, platí-li $\overline{A_1 S_2} \perp p$, neboť bodem S_2, jakožto středem, je stanovena kuželosečka svazku, která má v bodě A_1 tečnu rovnoběžnou s polárou p.

Místo hvězdice S_2 $(x_0, x_1, \ldots)$ mohli jsme ve vztahu (5) použít také na př. hvězdice S_3 $(y_0, y_1, \ldots)$. To by vedlo k jiné kuželosečce než je ν, ale výsledné tři body — středy hledaných kuželoseček — dostali bychom vždy tytéž, což lze snadno odůvodniti, uvážíme-li uvedené vytvoření kuželosečky středové použitím hvězdice tečen A_1 $(t_0, t_1, \ldots)$.

Speciální případy, kde dva nebo tři z daných tří bodů (kromě vrcholu) jsou nahrazeny tečnou s dotykovým bodem nebo oskulační kružnicí v příslušném bodě, řeší se stejně. Rovněž *rovnoosá hyperbola určená vrcholem a dvěma body* (nebo vrcholem a tečnou s bodem dotyku) má řešení stejné s předchozím obecným případem. Čtvrtý základní bod svazku kuželoseček je v průsečíku výšek trojúhelníka daných tří bodů. Středová kuželosečka je zde t. zv. Feuerbachova kružnice devíti bodů.

V každém z uvedených příkladů dostaneme vždy alespoň jedno řešení vedoucí k reálné kuželosečce. Jsou-li dva z daných bodů komplexně sdružené (vrchol reálný), dostaneme rovněž alespoň jednu výslednou kuželosečku reálnou. (Odůvodnění: Existuje nejméně jeden reálný bod S_j, který je průsečíkem kuželoseček ν a σ, čímž je zaručen ještě druhý reálný průsečík.)

Žádnou z uvedených úloh (vyjma případ, kdy středová kuželosečka se stává složenou) nelze řešit pouhým pravítkem a kružítkem. Upravme si proto podmínky takto:

Úloha 2.: *Čtyřmi body kružnice proložit kuželosečku, mající v jednom ze zvolených bodů (reálném) vrchol.*

Úloha 3.: *Třemi body paraboly proložit kuželosečku, mající vrchol ve vrcholu paraboly.*

Tyto úlohy 2., 3. je možno řešit kružítkem a pravítkem. Řešení přenechávám čtenáři.

Po vyřešení předešlých úloh vnucuje se nám otázka, jak řešit zdánlivě podobný případ u paraboly, totiž:

Úloha 4.: *Sestrojit parabolu, danou vrcholem a dvěma body.*

Poznámka: 1. Tato úloha nepatří logicky k úloze 1., neboť jsme vpředu užívali vlastností svazku kuželoseček, kdežto zde nejde o svazek. Řešení je tedy odlišné.

2. Případ s elementy imaginárními (vrchol reálný) je výhodnější řešit postupem, odlišným od způsobu zde uvedeného, na př. způsobem užitým při řešení obecnější úlohy p. Ing. Langrem v Rozhledech roč. 23., str. 58—60.

Řešení: Dáno: vrchol V, body A, B. Spojnice $\overline{VA}$ je asymptotou hyperboly, označené h; střed její je souměrný podle bodu A k vrcholu V; budiž označen O. Druhá asymptota je rovnoběžná se spojnicí $\overline{AB}$. Spojnice $\overline{VB}$ je tečnou hyperboly h, bod B jejím dotykovým bodem. Tím je hyperbola h určena. Nad úsečkou $\overline{VB}$ jakožto průměrem opíšeme kružnici označenou k. Bod B jsme volili pro obě křivky společný, pročež kružnice k protíná hyperbolu h ve třech dalších bodech M_i, $i = 1, 2, 3$ (jeden musí býti reálný, dva mohou býti komplexně sdružené). Spojnice $\overline{VM_i}$ jsou vrcholové tečny hledaných parabol. Další postup je již snadný.

Odůvodnění řešení: Nejprve vyslovíme podmínku, která bude vedoucí pro postup řešení: k tečně paraboly v bodě V musí býti příslušný průměr kolmý (pak je ovšem osou). Zvolíme-li si libovolný směr za průměr paraboly, procházející body V, A, B, je tím jednoznačně určena parabola, a tečna k ní v bodě V svírá s příslušným průměrem úhel, obecně různý od pravého. Sestrojme pro obecně zvolený průměr p tečnu k parabole v bodě V použitím Pascalovy poučky: označme $V \equiv 1 \equiv 2$; $A \equiv 3$, $B \equiv 4$, a směr průmětu p nám udává na nevlastní přímce splývající body: $5 \equiv 6$. Pro Pascalovu přímku dostáváme body: Předně U_∞, t. j. průsečík tečny u_∞ (t. j. nevlastní přímky) se spojnicí $\overline{VA}$ (čili nevlastní bod této přímky). Druhý bod je P, t. j. průsečík přímky $p \equiv \overline{16}$ s přímkou $\overline{34} \equiv \overline{AB}$. Pascalova přímka, označená $m \equiv \overline{PU_\infty}$, protíná přímku $\overline{45}$, t. j. rovnoběžku s průměrem p bodem B, označenou n, v bodě H. Spojnice $\overline{VH}$ je hledaná tečna.*) Probereme-li případ celé hvězdice průměrů, dostáváme výsledky:

$$V(p, p_1, \ldots) :: B(n, n_1, \ldots), \tag{6}$$
$$V(p, p_1, \ldots) :: U_\infty(m, m_1, \ldots), \tag{7}$$

a porovnáním obou vztahů dostáváme:

$$B(n, n_1, \ldots) ::: U_\infty(m, m_1, \ldots), \tag{8}$$

*) Provedeme-li záměnu označení pro použití Pascalovy věty ve smyslu: $B \equiv 3$, $A \equiv 4$, dostáváme při stejném postupu bod H jiný, avšak výsledná spojnice $\overline{VH}$, t. j. tečna v bodě V, je totožná s výslednou tečnou alternativy prvé. Tím je odůvodněna pro další postup oprávněnost užívání pouze jedné alternativy.

z čehož plyne, že průsečíky odpovídajících si přímek hvězdic ve vztahu (8) dávají kuželosečku, a to hyperbolu, označenou v řešení h. Má tuto vlastnost: spojíme-li libovolný její bod, označený H_r, s bodem V, dostáváme tečnu v tomto bodě k určité parabole (procházející body V, A, B), jejíž osa je rovnoběžná se směrem $\overline{H_rB}$. Z tohoto důvodu řeší kružnice k naši úlohu.

Pro bod B (t. j. čtvrtý průsečík kružnice k s hyperbolou h) dostáváme jako výsledek parabolu složenou (z přímky $\overline{VB}$ a rovnoběžky s touto bodem A), což vyplývá z vlastnosti hyperboly h. Tato parabola ovšem nevyhovuje našim podmínkám. Úloha má tedy tři řešení.

Pro zajímavost si uveďme případ, kde *body A, B nahradíme tečnou t s dotykovým bodem T*. Řešení je zde jednodušší, neboť hyperbola h stává se složenou ze svých asymptot (sestrojí se stejně jak bylo uvedeno vpředu. $\overline{VA}$ nahradím $\overline{VT}$; $\overline{AB} \equiv t$) a kružnice k se opíše nad průměrem $\overline{VT}$. Obecně dostáváme dvě jednoduché kuželosečky, a abychom byli důslední, musíme též do řešení vzíti parabolu složenou z dvojnásob počítané přímky $\overline{VT}$. Tím dostáváme i pro tento případ tři řešení, což nebývá u této úlohy uváděno. Odůvodnění posledního tvrzení o složené parabole si provede laskavě čtenář sám.

Poznámky: 1. Úlohy zde uvedené lze zobecnit, nahradíme-li podmínku: vrchol kuželosečky v daném bodě, podmínkou: úhel tečny a sdruženého průměru v daném bodě.

2. Úloha: sestrojit kuželosečku z daných čtyř tečen, z nichž jedna je vrcholová, není duální k úloze 1.

3. Úlohu 2. lze řešit způsobem elementárním, založeným na jiném principu. Přenechávám to čtenáři. (Elementární způsob řešení se provede podle způsobu odvozeného v knize: Dr. V. Hlavatý, Projektivní geometrie, I. díl, Praha 1944, str. 273, poučka (6,3)).

Příspěvek ke konstrukci tečen a středů křivosti jistých bicirkulárních kvartik.

Rudolf Piska, Kroměříž.

1. Výtvarný zákon, rovnice.

Pohybuje-li se bod $A(\xi; \eta)$ po kružnici

$$(\xi - m)^2 + (\eta - n)^2 = r^2 \quad (r \neq 0), \tag{1,1}$$

pak trajektorie (c) bodu C, pro nějž platí vztahy: $\overline{CA} = \overline{OA}$, $CA \parallel y$, je bicirkulární křivka čtvrtého stupně. Souřadnice