Větami a vzorci v těchto IX odstavcích vyloženými, ovšem s připojením obyčejných vzorců goniometrických a trigonometrických, vystačí se úplně při výpočtu jakýchkoliv ploch krystallových se vztahem k danému prvotvaru, jak příklady, jež v pozdějších pojednáních se vyloží, jasně dosvědčí.

---

# Součet $k$-tých mocnin čísel řady přirozené.

Pro žáky středních škol napsal

**Jan Slavík,**

professor akad. gymnasia v Praze.

Dle poučky binomické pro celistvé a kladné hodnoty mocnitele $k$ jest

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \ldots + b^k,$$

při čemž, jak známo, počet členů $= k+1$.

Dle toho jest

$$\begin{aligned}
1^k &= 1^k, \\
(1+1)^k &= 1^k + \binom{k}{1} 1^{k-1} + \binom{k}{2} 1^{k-2} + \ldots + 1, \\
(2+1)^k &= 2^k + \binom{k}{1} 2^{k-1} + \binom{k}{2} 2^{k-2} + \ldots + 1, \\
(3+1)^k &= 3^k + \binom{k}{1} 3^{k-1} + \binom{k}{2} 3^{k-2} + \ldots + 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n+1)^k &= n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \binom{k}{2} n^{k-2} + \ldots + 1.
\end{aligned}$$

Součtem ve sloupcích obdržíme

$$(n+1)^k = 1^k + \binom{k}{1} \Sigma n^{k-1} + \binom{k}{2} \Sigma n^{k-2} + \ldots + n$$

aneb

$$(n+1)^k - (n+1) = \binom{k}{1} \Sigma n^{k-1} + \binom{k}{2} \Sigma n^{k-2} + \ldots + \binom{k}{1} \Sigma n$$

čili

$$(n+1)\,[(n+1)^{k-1}-1]=\binom{k}{1}\sum_1^n n^{k-1}+\binom{k}{2}\sum_1^n n^{k-2}+\dots$$
$$+\binom{k}{1}\sum_1^n n.$$

Je-li $k=2$, bude $(n+1)\,.\,n=2\sum_1^n n$, z čehož

$$(1)\qquad \sum_1^n n=\frac{n}{2}(n+1).$$

Je-li $k=3$, bude

$$(n+1)\,[(n+1)^2-1]=3\sum_1^n n^2+3\sum_1^n n$$

aneb

$$(n+1)\,.\,\frac{2n^2+n}{2}=3\sum_1^n n^2,$$

tedy

$$(2)\qquad \sum_1^n n^2=\frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1).$$

Klademe-li $k=4$, bude

$$(n+1)\,[(n+1)^3-1]=4\sum_1^n n^3+6\sum_1^n n^2+4\sum_1^n n,$$

a užijeme-li předchozích vzorců, konečně

$$(3)\qquad \sum_1^n n^3=\frac{n^2\,(n+1)^2}{4}\ \text{a t. d.}$$

---

# O dělitelnosti čísel dekadických jedenácti.

Napsal

**Karel Pánek,**

professor akademického gymnasia v Praze.

1. Číslo jest dělitelno 11, skládá-li se ze sudého počtu pouhých devítek; na př. ... 9999, neboť pak je lze psáti

$$99+99\,.\,10^2+99\,.\,10^4+\dots+99\,.\,10^{2n}.$$

Každý sčítanec obsahuje činitele 99 a proto jest celý součet 11 dělitelný.

2. Sudá mocnost čísla 10 zmenšená o jedničku jest 11 dělitelná ($10^{2n}-1$), neboť vykonajíce, co tu naznačeno, nabudeme případu prvního; na př. $10^4-1=10000-1=9999$.